МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ОДЕССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ «НАДЕЖНОСТЬ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Одесса ОНПУ 2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ОДЕССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра нефтегазового и химического машиностроения

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«НАДЕЖНОСТЬ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

для студентовв заочной формы обучения
специальности 7.05050315 (8.05050315)

Утверждено на заседании
кафедры НГХМ
Протокол № 8 от 17. 03.2015.

Одесса ОНПУ 2015

Конспект лекцій з дисципліни «Надійність технічних систем». Для студентів заочної форми навчання спеціальності 7.05050315 (8.05050315) – Обладнання хімічних виробництв і підприємств будівельних матеріалів / Укл. О.С. Савєльєва, І.І Становська, П.С. Швець. - Одеса: ОНПУ, 2015. – 118 с.

Укладачі: Савєльєва О.С. - д-р техн. наук, доцент
Становська І.І. - канд. техн. наук
Швець П.С. - канд. техн. наук

Содержание

Введение

Одной из важных характеристик, учитываемых при проектировании, разработке и эксплуатации машин и аппаратов, является их надежность.

Современные химические, нефтехимические и нефтеперерабатывающие производства – это имеющие длительный жизненный цикл, нормально стареющие, обладающие большой мощностью и интенсивными режимами эксплуатации химико-технологические объекты или системы (ХТС), которым свойственны сложные технологические процессы с высокой производительностью оборудования, длинными технологическими цепочками потоков перерабатываемых веществ и сложными устройствами контроля и управления технологическими процессами.

Их развитие связано с наличием двух тенденций: с одной стороны – снижение надежности функционирования ХТС вследствие усложнения технологической топологии, а с другой – необходимость повышения надежности ХТС, т. к. увеличение их мощности влечет за собой резкое снижение качества и экономической эффективности в результате отказов в работе системы.

В связи с этим перед нефтегазохимическим машиностроением стоит необходимость решения задач обеспечения высокой надежности функционирования производств и агрегатов наряду с проблемами их функционирования в оптимальном режиме по экономическим и энергетическим показателям; разработки замкнутых технологических циклов с максимальной переработкой сырья и экономией энергии; создания оптимальных условий для последующей переработки полупродуктов, рекуперации вторичных материальных ресурсов и утилизации отходов.

Отличительными особенностями объектов и процессов нефтегазохимического машиностроения являются:

1) большое число и сложность связей между параметрами состояния объектов;
2) повышение ответственности выполняемых ими функций;
3) большой разброс условий и режимов эксплуатации одних и тех же элементов;
4) усиление интенсивности режимов и условий эксплуатации (в широком диапазоне температур и давлений, в вакууме, при высокой влажности, большой вибрации и т. п.);
5) трудоемкость построения и использования процедур математического описания; высокий уровень погрешности измерений технологических параметров, а иногда невозможность проведения измерений;
6) необходимость принятия решений для управления технологическими процессами и производствами в условиях неполной и/или некачественной информации о состоянии оборудования и аппаратов;
7) несовершенство и недостаточность методологии для решения многих вопросов обеспечения надежности и безопасности химических объектов.

1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1.1 Надежность как комплексное свойство объекта

Изучение причин, вызывающих отказы объектов, определение закономерностей, которым они подчиняются, разработка метода проверки надежности изделий и способов контроля надежности, методов расчетов и испытаний, изыскание путей и средств повышения надежности – являются предметом исследований надежности.

Наука о надежности является комплексной наукой и развивается в тесном взаимодействии с другими науками, такими как физика, химия, математика и др., что особенно наглядно проявляется при определении надежности систем большого масштаба и сложности.

При изучении вопросов надежности рассматривают самые разнообразные объекты – изделия, сооружения, системы с их подсистемами.

Надежность изделия зависит от надежности его элементов, и чем выше их надежность, тем выше надежность всего изделия.

> ***Надежность*** **– свойство объекта сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения, технического обслуживания, хранения и транспортирования**.

Недостаточная надежность объекта приводит к огромным затратам на его ремонт, простою машин, прекращению снабжения населения электроэнергией, водой, газом, транспортными средствами, невыполнению ответственных задач, иногда к авариям, связанным с большими экономическими потерями, разрушением крупных объектов и с человеческими жертвами. Чем меньше надежность машин, тем большие партии их приходится изготовлять, что приводит к перерасходу металла, росту производственных мощностей, завышению расходов на ремонт и эксплуатацию.

Надежность объекта является ***комплексным свойством,*** *ее* оценивают по четырем показателям – безотказности, долговечности, ремонтопригодности и сохраняемости или по сочетанию этих свойств.

Безотказность – свойство объекта сохранять работоспособность непрерывно в течение некоторого времени или некоторой наработки. Это свойство особенно важно для машин, отказ в работе которых связан с опасностью для жизни людей. Безотказность свойственна объекту в любом из возможных режимов его существования, в том числе, при хранении и транспортировке.

Долговечность – свойство объекта сохранять работоспособное состояние до наступления предельного состояния при установленной системе технического обслуживания и ремонта.

В отличие от безотказности долговечность характеризуется продолжительностью работы объекта по суммарной наработке, прерываемой периодами для восстановления его работоспособности в плановых и неплановых ремонтах и при техническом обслуживании.

Ремонтопригодность – свойство объекта, заключающееся в его приспособленности к поддержанию и восстановлению работоспособного состояния путем проведения технического обслуживания и ремонта. Важность ремонтопригодности технических систем определяется огромными затратами на ремонт машин.

Сохраняемость – свойство объекта сохранять в заданных пределах значения параметров, характеризующих способность объекта выполнять требуемые функции, в течение и после хранения и (или) транспортирования. Практическая роль этого свойства велика для деталей, узлов и механизмов, находящихся на хранении в комплекте запасных принадлежностей.

Для объектов, работающих непрерывно, таких, например, как енергоблок электрической станции, магистральные нефте- и газопроводы важними являються безотказность, ремонтопригодность и долговечность. А объекты, работающие сезонно, должны кроме приемлемой безотказности иметь высшие показатели ремонтопригодности, долговечности и сохраняемости (сельскохозяйственная техника).

1.2 Классификация состояний. Понятие отказа

Объекты подразделяют на ***невосстанавливаемые,*** которые не могут быть восстановлены потребителем и подлежат замене (например, электрические лампочки, подшипники, резисторы и т.д.), и ***восстанавливаемые,*** которые могут быть восстановлены потребителем (например, телевизор, автомобиль, трактор, станок и т.д.).

Надежность объекта *характеризуется* следующими состояниями: исправное, неисправное, работоспособное, неработоспособное.

Исправное состояние – такое состояние объекта, при котором он соответствует всем требованиям нормативно-технической и (или) конструкторской (проектной) документации. Исправное изделие обязательно работоспособно.

Неисправное состояние – такое состояние объекта, при котором он не соответствует хотя бы одному из требований нормативно-технической и (или) конструкторской (проектной) документации. Различают неисправности, не приводящие к отказам, и неисправности, приводящие к отказам. Например, повреждение окраски автомобиля означает его неисправное состояние, но такой автомобиль работоспособен.

Работоспособным состоянием называют такое состояние объекта, при котором он способен выполнять заданные функции, соответствующие требованиям нормативно-технической и (или) конструкторской (проектной) документации.

Неработоспособное изделие является одновременно неисправным.

Восстановление как перевод объекта из неработоспособного в работоспособное состояние включает в себя идентификацию отказа (определение его места и характера), наладку или замену отказавшего элемента, регулирование и контроль технического состояния элементов объекта и заключительную операцию контроля работоспособности объекта в целом. Таким образом, восстанавливаемость – это совокупность свойств ремонтопригодности элементов и мероприятий по обслуживанию, которые приводят отказавшую систему в работоспособное состояние.

<u>Восстанавливаемый объект</u> – объект, для которого в рассматриваемой ситуации проведение восстановления работоспособного состояния предусмотрено в нормативно-технической и (или) конструкторской (проектной) документации.

<u>Ремонтируемый объект</u> – объект, для которого проведение ремонтов предусмотрено в нормативно-технической и (или) конструкторской (проектной) документации. Для неремонтируемого объекта ремонты не предусматриваются.

<u>Обслуживаемый объект</u> – объект, для которого проведение технического обслуживания предусмотрено в нормативно-технической и (или) конструкторской (проектной) документации. Для необслуживаемого объекта техническое обслуживание не предусматривается.

Невосстанавливаемый объект достигает предельного состояния при возникновении отказа или при достижении заранее установленного (нормативного) предельно допустимого значения срока службы или суммарной наработки.

Для восстанавливаемых объектов предельное состояние системы (элемента) характеризуется невозможностью дальнейшей эксплуатации системы (элемента) либо:
– по техническим причинам (износ и/или старение);
– по экономическим причинам (резкое возрастание эксплуатационных затрат и снижение эффективности производства);
– по требованиям безопасности эксплуатации системы в целом или отдельных ее элементов.

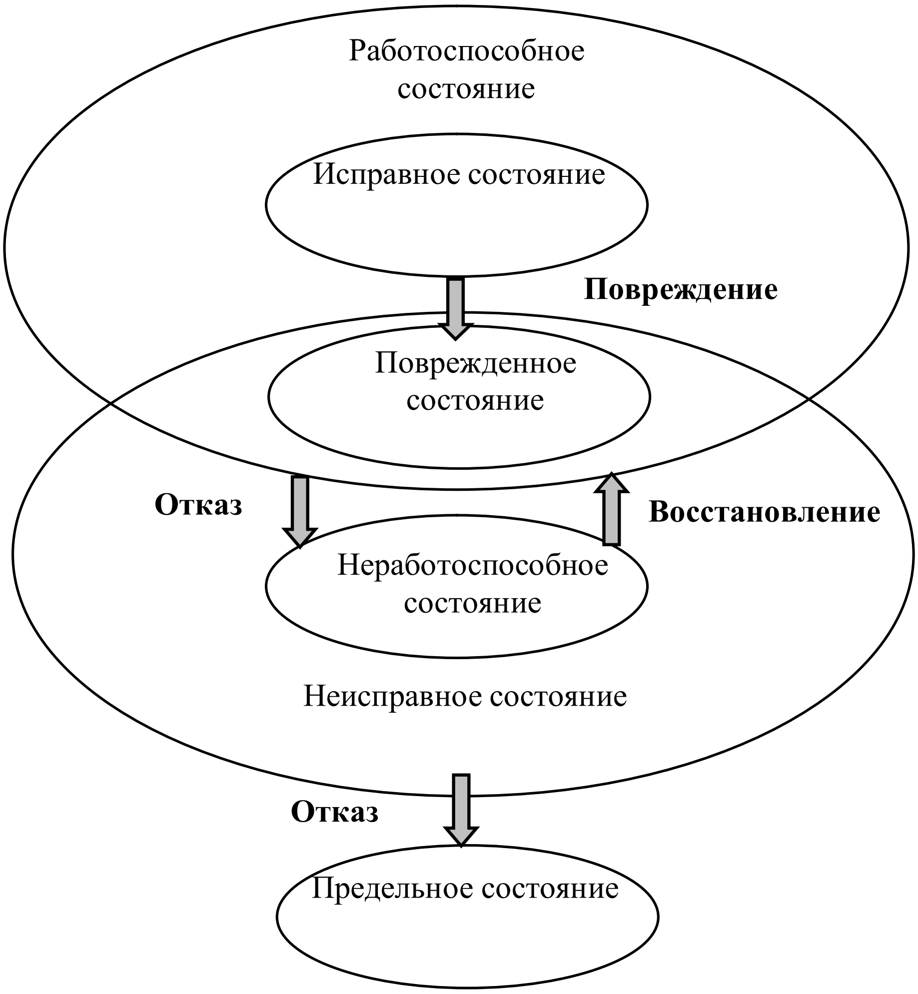


Рисунок 1.1 – Схема состояний и событий

Жизненным циклом объекта (изделия) будем называть его эксплуатацию до предельного состояния.

Предельное состояние объекта – состояние, при котором его дальнейшая эксплуатация либо восстановление работоспособного состояния невозможно или нецелесообразно.

Признаки (критерии) предельного состояния устанавливаются нормативно-технической и (или) конструкторской (проектной) документацией на данный объект.

1.3 Классификация отказов

Важными понятиями в теории надежности и практике эксплуатации ТС являются повреждения и отказы.

***Отказ* – это случайное событие, заключающееся в нарушении работоспособного состояния объекта**.

Отказы объектов ТС могут быть разных видов и *классифицируются по различным признакам.*

***Повреждением* называется событие, заключающееся в нарушении исправности ТС или ее составных частей из-за влияния внешних условий, превышающих уровни, установленные НТД**.

Повреждение может быть *существенным* и явиться причиной отказа и *несущественным*, при котором работоспособность ТС сохраняется. Применительно к отказу и повреждению рассматривают критерий, причину, признаки проявления, характер и последствия.

Критерием отказа являются признаки выхода хотя бы одного заданного параметра за установленный допуск. Критерии отказа должны указываться в НТД на объект.

Причинами отказа могут быть просчеты, допущенные при конструировании, дефекты производства, нарушения правил и норм эксплуатации, повреждения, а также естественные процессы изнашивания и старения.

Для обнаружения отказа любого объекта необходимо установить признаки проявления и характер фактического существования отказа.

Признаки отказа или повреждения проявляют непосредственные или косвенные воздействия на органы чувств наблюдателя (оператора) явлений, характерных для неработоспособного состояния объекта, или процессов с ними связанных. Например, возникновение определенных шумов (стука) при работе машин, утечка газов или жидкостей из аппаратов, трубопроводов, машин; изменения установленных технологическим регламентом значений давлений, температур, расхода и концентрации веществ; рост гидравлического и теплового сопротивления; снижение выпуска и качества продукции и т.п.

Характер отказа или повреждения определяют конкретные физико-химические, технологические, механические и другие фактические изменения в объекте, связанные с возникновением отказа (повреждения).

К ***последствиям отказа*** или повреждения относятся явления и события, возникшие после отказа или повреждения и в непосредственной причинной связи с ним.

Факт возникновения отказа устанавливается согласно некоторому отличительному признаку или совокупности признаков неработоспособного состояния объекта, называемых критерием отказа. Понятие отказа является содержательным, поскольку позволяет вводить численные характеристики надежности.

Отказы **по характеру** возникновения подразделяют на случайные и неслучайные (систематические).

<u>*Случайные отказы*</u> вызваны непредусмотренными нагрузками, скрытыми дефектами

материалов, погрешностями изготовления, ошибками обслуживающего персонала.

Неслучайные отказы – это закономерные явления, вызывающие постепенное накопление повреждений, связанные с влиянием среды, времени, температуры, облучения и т. п.

В зависимости от возможности **прогнозировать** момент наступления отказа все отказы подразделяют на *внезапные* (поломки, заедания, отключения) и *постепенные* (износ, старение, коррозия).

По причинам возникновения отказы классифицируют на *конструктивные* (вызванные недостатками конструкции), *производственные* (вызванные нарушениями технологии изготовления) и *эксплуатационные* (вызванные неправильной эксплуатацией).

Внезапный отказ характеризуется скачкообразным изменением значений одного или нескольких параметров объекта. Постепенный отказ возникает в результате постепенного изменения этих параметров, накопления повреждений за некоторое время.

Внезапные отказы технологических элементов характеризуются тем свойством, что обычно отсутствуют видимые признаки их приближения, т. е. непосредственно перед отказом обычно не обнаруживаются количественные изменения характеристик элемента; они являются следствием случайных процессов неконтролируемого изменения каких-либо параметров элементов (считаются случайными событиями), их наступление не может быть предсказано предварительным контролем или диагностированием. Последнее обусловлено тем, что либо вообще не существует надежных методов диагностирования, либо такое Лабораторное оборудование дорого и может быть установлено не на всех аппаратах.

Для оборудования, не имеющего вращающихся частей, внезапные отказы обусловлены нарушением его герметичности вследствие трещин, локальных сквозных разрушений оболочек, сварных и разъемных соединений и т. п.

К внезапным отказам в химической технологии относятся также отказы аварийных систем безопасности, блокировок и других средств автоматического управления процессом. Наибольшую опасность представляют внезапные отказы в работе средств регулирования заданных параметров: температуры, давления, уровней жидкости в аппаратуре, которые могут привести к разгерметизации технологического оборудования, выбросам в атмосферу взрывоопасных продуктов и крупным авариям.

Постепенно элементы отказывают за счет старения, коррозионно-эрозионного воздействия, изнашивания (трения сопряженных элементов), переменных нагрузок, усталости, хотя все установленные правила и нормы проектирования, изготовления и эксплуатации могут соблюдаться (деградационный отказ). В отличие от внезапных отказов в элементе при анализе моментов возникновения *постепенных* отказов контролируется изменяющийся конструкционный или технологический параметр, при достижении критического значения которого наступает его отказ.

1.4 Временные понятия

В ГОСТ 27.002-89 даны определения ряду понятий, связанных с временными харатеристиками в работе объекта.

Наработка – продолжительность или объем работы объекта. Наработка может быть как непрерывной величиной (продолжительность работы в часах, километраж пробега и т. п.), так и целочисленной величиной (число рабочих циклов, запусков и т. п.).

Наработка до отказа – наработка объекта от начала эксплуатации до возникновения первого отказа.

Наработка между отказами – наработка объекта от окончания восстановления его работоспособного состояния после отказа до возникновения следующего отказа.

Время восстановления – продолжительность восстановления работоспособного состояния объекта.

Ресурс – суммарная наработка объекта от начала его эксплуатации или ее возобновления после ремонта до перехода в предельное состояние.

Срок службы – календарная продолжительность эксплуатации от начала эксплуатации объекта или ее возобновления после ремонта до перехода в предельное состояние.

Срок сохраняемости – календарная продолжительность хранения и (или) транспортирования объекта, в течение которой сохраняются в заданных пределах значения параметров, характеризующих способность объекта выполнять заданные функции. По истечении срока сохраняемости объект должен соответствовать требованиям безотказности, долговечности и ремонтопригодности, установленным нормативно-технической документацией на объект.

Остаточный ресурс – суммарная наработка объекта от момента контроля его технического состояния до перехода в предельное состояние. Аналогично вводятся понятия остаточной наработки до отказа, остаточного срока службы и остаточного срока хранения

Назначенный ресурс – суммарная наработка, при достижении которой эксплуатация объекта должна быть прекращена независимо от его технического состояния.

Назначенный срок службы – календарная продолжительность эксплуатации, при достижении которой эксплуатация объекта должна быть прекращена независимо от его технического состояния.

Назначенный срок хранения – календарная продолжительность хранения, при достижении которой хранение объекта должно быть прекращено независимо от его технического состояния.

По истечении назначенного ресурса (срока службы, срока хранения) объект должен быть изъят из эксплуатации и должно быть принято решение, предусмотренное соответствующей нормативно-технической документацией – направление в ремонт, списание, уничтожение, проверка и установление нового назначенного срока и т. д.

<u>Вопросы для самоконтроля</u>.

1. Дайте определение надежности.
2. Какие показатели характеризуют надежность объекта? Дайте их краткую характеристику.
3. Перечислите основне состояния объекта, характеризующие его надежность. Дайте их краткую характеристику.
4. Дайте определение отказу. Приведите основные виды отказов.
5. Перечислите основные временные характеристики в работе объекта. Дайте их краткую характеристику

2 ПОКАЗАТЕЛИ НАДЕЖНОСТИ

2.1 Общие сведения о показателях надежности

При исследовании надежности оборудования и технологических схем нефтегазохимических производств, а также для разработки мероприятий по обеспечению и оптимизации их надежности необходимо прежде всего иметь количественные характеристики, или оценки, этого комплексного свойства.

> ***Показателями надежности*** **называют количественные характеристики одного или нескольких свойств, составляющих надежность объекта. Показатель надежности может бать размерной или безразмерной величиной.**

К таким характеристикам относят, например, □правно□ понятия – наработку, наработку до □правно, наработку между □правно□т, ресурс, срок службы, время восстановления. Значения этих показателей получают по результатам испытаний или эксплуатации.

В теории надежности различают:

- **единичные показатели надежности** (показатели надежности, характеризующие одно из свойств, составляющих надежность объекта);
- **комплексные показатели надежности** (показатели надежности, характеризующие несколько свойств, составляющих надежность объекта);
- **расчетные показатели надежности** (показатели надежности, значения которых определяются расчетным методом);
- **экспериментальные показатели надежности** (показатели надежности, точечная или интервальная оценка которых определяется по данным испытаний);
- **эксплуатационные показатели надежности** (показатели надежности, точечная или интервальная оценка которых определяется по данным эксплуатации);
- **экстраполированные показатели надежности (**показатель надежности, точечная или интервальная оценка которых определяется на основании результатов расчетов, испытаний и (или) эксплуатационных данных путем экстраполирования на другую продолжительность эксплуатации и другие условия эксплуатации).

2.2 Основные показатели надежности

Показатели безотказности

- *вероятность безотказной работы* – вероятность того, что в пределах заданной наработки отказ объекта не возникает;
- *гамма-процентная наработка до отказа* – наработка, в течение которой отказ объекта не возникнет с вероятностью γ, выраженной в процентах
- *средняя наработка до отказа* – математическое ожидание наработки объекта до первого отказа;
- *средняя наработка на отказ* – отношение суммарной наработки восстанавливаемого объекта к математическому ожиданию числа его отказов в течение этой наработки;
- *интенсивность отказов* – условная плотность вероятности возникновения отказа объекта, определяемая при условии, что до рассматриваемого момента времени отказ не

возник. Этот показатель относится к невосстанавливаемым изделиям;

- *параметр потока отказов* – отношение математического ожидания числа отказов восстанавливаемого объекта за достаточно малую его наработку к значению этой наработки;

- *средний параметр потока отказов* – отношение математического ожидания числа отказов восстанавливаемого объекта за конечную наработку к значению этой наработки.

Все показатели безотказности (как приводимые ниже другие показатели надежности) определены как вероятностные характеристики. Их статистические аналоги определяют методами математической статистики.

Показатели долговечности

- *гамма-процентный ресурс* – суммарная наработка, в течение которой объект не достигнет предельного состояния с вероятностью γ, выраженной в процентах;

- *средний ресурс* – математическое ожидание ресурса;

- *гамма-процентный срок службы* – календарная продолжительность эксплуатации, в течение которой объект не достигнет предельного состояния с вероятностью γ, выраженной в процентах;

- *средний срок службы* – математическое ожидание срока службы.

При использовании показателей долговечности следует указывать начало отсчета и вид действий после наступления предельного состояния (например гамма-процентный ресурс от второго капитального ремонта до списания).

Показатели долговечности, отсчитываемые от ввода объекта в эксплуатацию до окончательного снятия с эксплуатации, называются гамма-процентный полный ресурс (срок службы), средний полный ресурс (срок службы).

Показатели долговечности, выраженные в календарном времени работы, позволяют непосредственно использовать их в планировании сроков организации ремонтов, поставки запасных частей, сроков замены оборудования. Недостаток этих показателей заключается в том, что они не позволяют учитывать интенсивность использования оборудования.

Единицы для измерения ресурса выбирают применительно к каждой отрасли и к каждому классу машин, агрегатов и конструкций отдельно. В качестве меры продолжительности эксплуатации может быть выбран любой неубывающий параметр, характеризующий продолжительность эксплуатации объекта (для емкостей – срок эксплуатации в годах, для автомобилей – пробег в километрах). Если наработку измерять числом производственных циклов, то ресурс будет принимать дискретные значения.

Показатели ремонтопригодности

- *вероятность восстановления* – вероятность того, что время восстановления работоспособного состояния объекта не превысит заданное значение;

- *гамма-процентное время восстановления* – время, в течение которого восстановление работоспособности объекта будет осуществлено с вероятностью γ, выраженной в процентах;

- *среднее время восстановления* – математическое ожидание времени восстановления работоспособного состояния объекта после отказа;

- *интенсивность восстановления* – условная плотность вероятности восстановления работоспособного состояния объекта, определенная для рассматриваемого момента времени при условии, что до этого момента восстановление не было завершено;

- *средняя трудоемкость восстановления* – математическое ожидание трудоемкости восстановления объекта после отказа.

Затраты времени и труда на проведение технического обслуживания и ремонтов с учетом конструктивных особенностей объекта, его технического состояния и условий эксплуатации характеризуются оперативными показателями ремонтопригодности.

Показатели сохраняемости

- *гамма-процентный срок сохраняемости* – срок сохраняемости, достигаемый объектом с заданной вероятностью γ, выраженной в процентах;

- *средний срок сохраняемости* – математическое ожидание срока сохраняемости.

Комплексные показатели надежности

- *коэффициент готовности* – вероятность того, что объект окажется в работоспособном состоянии в произвольный момент времени, кроме планируемых периодов, в течение которых применение объекта по назначению не предусматривается. Физический смысл коэффициента готовности – это вероятность того, что в прогнозируемый момент времени изделие будет исправно, т.е. оно не будет находиться во внеплановом ремонте;

- *коэффициент оперативной готовности* – вероятность того, что объект окажется в работоспособном состоянии в произвольный момент времени, кроме планируемых периодов, в течение которых применение объекта по назначению не предусматривается, и, начиная с этого момента, будет работать безотказно в течение заданного интервала времени;

- *коэффициент технического использования* – отношение математического ожидания суммарного времени пребывания объекта в работоспособном состоянии за некоторый период эксплуатации к математическому ожиданию суммарного времени пребывания объекта в работоспособном состоянии и простоев, обусловленных техническим обслуживанием и ремонтом за тот же период;

- *коэффициент сохранения эффективности* – отношение значения показателя эффективности использования объекта по назначению за определенную продолжительность эксплуатации к номинальному значению этого показателя, вычисленному при условии, что отказы объекта в течение тою же периода не возникают.

Вопросы для самоконтроля.

1. Дайте определение показателей надежности. Приведите классификацию.
2. Какие показатели относятся к показателям безотказности?
3. Какие показатели относятся к показателям долговечности?
4. Какие показатели относятся к показателям ремонтопригодности?
5. Какие показатели относятся к показателям сохраняемости?

3 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

Теория надежности – наука, изучающая:
- закономерности возникновения отказов систем;
- нормированные критерии и количественные характеристики надежности;
- методы анализа сложных систем по критериям надежности;
- методы повышения надежности;
- методы испытаний на надежность;
- методы эксплуатации систем с учетом надежности (обоснование периодичности технического обслуживания систем, норм запасных частей, методов отыскания неисправностей);
- методы сбора и анализа статистических данных об отказах систем.

Случайный характер времени возникновения отказов, сложность объектов позволяет заключить, что математическим аппаратом теории надежности может быть теория вероятностей и математическая статистика, а также теория массового обслуживания (теория графов и цепи Маркова).

Из-за невозможности точного предсказания отказа как случайного события по времени и месту возникновения следует, что полностью предупредить отказы невозможно. Однако могут быть приняты меры для уменьшения их частоты.

Если при массовых событиях, например, при массовых испытаниях, обязательно происходит некоторое событие, то такое событие называется достоверным. Если же некоторое событие заведомо не может произойти, то его называют невозможным.

События, которые при каждом отдельном явлении (случае, испытании) предсказать невозможно, называют случайными.

Случайной величиной называется переменная величина, которая в результате испытаний или при каких-то явлениях может принимать то или иное значение (например, отклонение размера и изделия от номинального значения, время безотказной работы изделий и пр.).

Случайным процессом или случайной функцией называется совокупность случайных величин, отвечающих различным значениям некоторого неслучайного параметра: изменение диаметра по длине валика, внутренние шумы, флюктуации в электрических цепях и т.д.

3.1 Понятие случайной величины

Отказы, возникающие в процессе испытаний или эксплуатации, могут быть вызваны неблагоприятным сочетанием различных факторов – рассеянием действующих нагрузок, отклонением от номинального значения механических характеристик материалов, неблагоприятным сочетанием допусков в местах сопряжения и т. п. Поэтому в расчетах надежности различные параметры рассматривают как случайные величины, которые могут принимать то или иное значение, неизвестное заранее.

Случайной величиной называют переменную величину X, принимающую в результате испытания то или иное числовое значение, которое нельзя предсказать точно, основываясь на условиях испытания, т. е. значение переменной X зависит от случая.

Случайным величинам противопоставляются величины детерминированные, значения которых предопределяются начальными условиями.

Любая случайная величина в конкретном опыте может принять любое возможное значение. Однако при многократном повторении опытов вероятности появления заданных значений случайной величины подчиняются некоторой статистически устойчивой закономерности, которая является наиболее полной и исчерпывающей вероятностной характеристикой этой величины.

Различают случайные величины ***прерывного*** (дискретного) и ***непрерывного*** типов.

Случайные величины в дальнейшем обозначать большими буквами, а их возможные значения – соответствующими малыми. Число дефектных деталей в партии изделий – дискретная величина, возможные значения которой 0, 1, 2,… .

3.2 Качественные характеристики случайных величин

Время безотказной работы изделия – непрерывная случайная величина.

Для каждого числа x в диапазоне изменения случайной величины X существует определенная вероятность $P(X < x)$ того, что X не превышает значения x. Вероятность этого события называют ***функцией распределения***:

$$F(x) = P(X < x). \tag{3.1}$$

Функция распределения – универсальная характеристика, так как она является функцией как непрерывных, так и дискретных случайных величин. Функция (x) относится к неубывающим функциям: x монотонно возрастает при непрерывных процессах и ступенчато возрастает при дискретных процессах.

В пределах изменения случайной величины X эта функция изменяется от 0 до 1:

$$F(-\infty) = 0; F(\infty) = 1;$$

Производную от функции распределения по текущей переменной называют ***плотностью распределения***

$$f(x) = dF(x)/d(x), \tag{3.2}$$

которая характеризует частоту повторений данного значения случайной величины. В теории надежности величину $f(x)$ называют ***плотностью вероятности***. Плотность распределения есть неотрицательная функция своего аргумента $f(x) \geq 0$.

Интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 .$$

В ряде случаев в качестве характеристик распределения случайных величин достаточно использовать некоторые числовые величины, среди которых в теории надежности наиболее употребительными являются *математическое ожидание* (среднее значение), *мода и медиана* (характеризуют положение центров группирования случайных величин на числовой оси), *дисперсия*, *среднее квадратическое отклонение* и *коэффициент вариации* (характеризуют рассеяние случайной величины).

Значения характеристик, полученные по результатам испытаний или эксплуатации, называют ***статистическими оценками***.

Характеристики распределения используют для прогнозирования надежности.

Для дискретных случайных величин ***математическое ожидание*** $M[X]$ равно сумме произведений всех возможных значений X на вероятности этих значений:

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \ . \tag{3.3}$$

Математическое ожидание для непрерывной случайной величины выражается интегралом в бесконечных пределах от произведения непрерывно изменяющихся возможных значений случайной величины на плотность распределения

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx . \tag{3.4}$$

Математическое ожидание случайной величины непосредственно связано с ее средним значением. При неограниченном увеличении числа опытов среднее арифметическое значение величины x приближается к математическому ожиданию и называется *оценкой среднего значения:*

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ . \tag{3.5}$$

где n – общее число опытов; x_i – текущее значение случайной величины.

*

Пример 3.1 Найти математическое ожидание количества бракованных изделий в выборке из пяти изделий, если случайная величина X (количество бракованных изделий) задана рядом распределения.

X_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,2373	0,3955	0,2637	0,0879	0,0146	0,0010

Решение. По формуле (3.3) находим

$M[X] = 0 \cdot 0{,}2373 + 1 \cdot 0{,}3955 + 2 \cdot 0{,}2637 + 3 \cdot 0{,}03879 + 4 \cdot 0{,}0146 + 5 \cdot 0{,}0010 = 1{,}25.$

*

В качестве меры рассеивания случайной величины используют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания, которое называют ***дисперсией случайной величины*** *X* и обозначают ***D***[*X*],

т.е ***дисперсией случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения этой величины от ее математического ожидания***.

С помощью дисперсии и среднеквадратического отклонения можно судить о рассеивании случайной величины вокруг математического ожидания.

Для дискретной случайной величины дисперсия равна:

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M[X])^2 p_i \ . \tag{3.6}$$

Для непрерывной случайной величины дисперсия определяется из выражения

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^2 f(x) dx \ . \tag{3.7}$$

Дисперсия случайной величины является характеристикой *рассеяния* – разбросанности значений случайной величины около ее математического ожидания.

Размерность дисперсии соответствует квадрату размерности случайной величины.

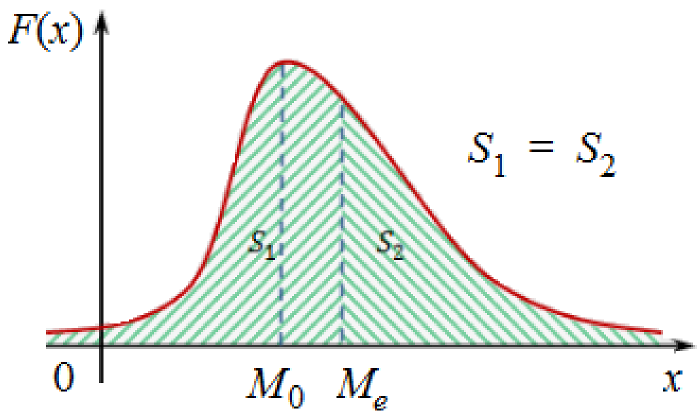


Рис. 3.1 Мода и медиана

Для наглядности в качестве характеристики рассеяния удобнее использовать величину, размерность которой совпадает с размерностью случайной величины. Такой характеристикой может быть ***среднее квадратическое отклонение,*** которое определяется как корень квадратный из дисперсии:

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} \ . \tag{3.8}$$

Чем больше разбросаны значения случайных величин, т.е., чем больше оно отличается от математического ожидания, тем больше дисперсия и среднеквадратическое отклонение.

Для оценки рассеяния с помощью безразмерной величины используют ***коэффициент вариации,*** который равен:

$$\nu[X] = \sigma[X] / \mathrm{M}[X]. \tag{3.9}$$

Модой случайной величины называют ее наиболее вероятное значение или то ее значение, при котором плотность вероятности максимальна.

Медиана характеризует расположение *центра группирования случайной величины.* Площадь под графиком функции плотности распределения делится медианой пополам.

Обобщением основных числовых характеристик случайной величины является понятие моментов случайной величины.

Начальным моментом q-го порядка случайной величины называют математическое ожидание величины:

$$\nu_q = M\left(X^q\right). \tag{3.10}$$

Начальный момент дискретной случайной величины

$$\nu_q = \sum_{i=1}^{n} x_i^q p_i, \tag{3.11}$$

начальный момент непрерывной случайной величины

$$\nu_q = \int_{-\infty}^{+\infty} x^q f(x) dx. \tag{3.12}$$

Центральным моментом q-го порядка случайной величины называют математическое ожидание величины $[X - M(X)]^q$:

$$\mu_q = M((x_i - M[X])^2). \tag{3.13}$$

Центральный момент дискретной случайной величины

$$\mu_q = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M[X])^q p_i, \tag{3.14}$$

центральный момент непрерывной случайной величины

$$\mu_q = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^q f(x) dx \tag{3.15}$$

Начальный момент первого порядка представляет собой математическое ожидание, а центральный момент второго порядка — дисперсию случайной величины.

Нормированный центральный момент третьего порядка служит характеристикой скошенности или асимметрии распределения (***коэффициент асимметрии***):

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}. \tag{3.16}$$

Нормированный центральный момент четвертого порядка служит характеристикой островершинности или плосковершинности распределения (***эксцесс***):

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \tag{3.17}$$

*

<u>*Пример 3.2.*</u> Случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ ax^2, & 0 < x < 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Найти коэффициент a, математическое ожидание, дисперсию и другие коэффициенты.

Решение:

$$\int_0^2 f(x)dx = a\int_0^2 x^2dx = a\frac{x^3}{3}\bigg|_0^2 = \frac{8}{3}a$$

Учитывая, что эта площадь должна бать равной единице, a = 3/8. Тогда, математическое ожидание

$$M[X] = \int_0^2 xf(x)dx = \frac{3}{8}\int_0^2 x^3dx = \frac{3}{8}\frac{x^4}{4}\bigg|_0^2 = 1{,}5$$

его квадрат

$$M(X^2) = \int_0^2 x^2 f(x)dx = \frac{3}{8}\int_0^2 x^4dx = \frac{3}{8}\frac{x^5}{5}\bigg|_0^2 = 2{,}4$$

дисперсия $D[X] = M(X^2) - (M(X))^2 = 2{,}4 - (1{,}5)^2 = 0{,}15$;

середнее квадратическое отклонение случайной величины

$$\sigma = \sqrt{D[X]} = \sqrt{0{,}15} \approx 0{,}3873.$$

Используя начальне моменты, определим центральне моменты третього и четвертого порядка:

$$\nu_1 = M(X) = 1{,}5;$$

$$\nu_2 = M(X^2) = 2{,}4;$$

$$\nu_3 = M(X^3) = \int_0^2 x^3 f(x)dx = \frac{3}{8}\int_0^2 x^5dx = \frac{3}{8}\frac{x^6}{6}\bigg|_0^2 = 4;$$

$$\nu_4 = M(X^4) = \int_0^2 x^4 f(x)dx = \frac{3}{8}\int_0^2 x^6dx = \frac{3}{8}\frac{x^7}{7}\bigg|_0^2 \approx 6{,}8571;$$

$$\mu_3 = \sum_{i=1}^{3}(x_i - M(X))^3 p_i = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^4 = -0{,}05;$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1 = 0{,}0696;$$

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = -\frac{0{,}05}{(0{,}3873)^3} = -0{,}86;$$

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{0,0696}{(0,3873)^4} - 3 = -0,093.$$

*

Квантиль – значение случайной величины, соответствующее заданной вероятности. Квантиль, соответствующую вероятности 0,5, называют медианой.

Аналогично предыдущим характеристикам понятия моды и медианы даны в статистической трактовке. Для *симметричного модального* (т.е. имеющего один максимум) *распределения* математическое ожидание, мода и медиана совпадают.

*

Пример 3.3. Функция распределения непрерывной случайной величины X задана выражением

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad при \quad x \le 0; \\ ax^3 \quad при \quad 0 < x \le 1; \\ 1 \quad при \quad x > 1. \end{cases}$$

Найти коэффициент a и плотность распределения $f(x)$.

Решение. Так как функция распределения случайной величины X непрерывна, то при $x = 1$, $ax^3 = 1$, откуда $a = 1$.

Плотность распределения выражается соотношением

$$f(x) = \frac{F(x)}{dx} = \begin{cases} 0 \quad при \quad x \le 0; \\ 3x^2 \quad при \quad 0 < x \le 1; \\ 0 \quad при \quad x > 1. \end{cases}$$

*

Пример 3.4. Плотность распределения непрерывной случайной величины X описывается выражением

$$f(x) = \begin{cases} ax \quad при \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 \quad при \quad x < 0 \quad или \quad x > 1. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины.

Решение. Математическое ожидание найдем по формуле (3.4):

$$M_x = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 xaxdx = \frac{a}{3}$$

Для определения дисперсии используем формулу (3.7):

$$D_x = \int_0^1 \left(x - \frac{a}{3}\right) axdx = a\left(\frac{1}{4} - \frac{2a}{9} + \frac{a^2}{18}\right).$$

Среднее квадратическое отклонение соответственно равно:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{a\left(\frac{1}{4} - \frac{2a}{9} + \frac{a^2}{18}\right)}.$$

Вопросы для самоконтроля.

1. Дайте определение случайной величины.
2. Дайте определение функции распределения и плотности распределения случайной величины.
3. Какие статистические характеристики используют для прогнозирования

надежности?

4. Дайте определение дисперсии и математического ожидания.
5. Какой безразмерной величиной оценивают рассеивание случайных величин? Какие показатели обобщают числовые характеристики случайной величины?

4 ЭЛЕМЕНТЫ ОСНОВ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методы теории вероятностей позволяют исследовать закономерности отказов как массовых случайных явлений. Однако они не дают возможности точно предсказать время возникновения отказ, поскольку оно представляет собой случайную величину. Кроме того, мы не можем определить точно, какой срок в состоянии проработать данное изделие, а способны лишь оценить ту вероятность, с какой оно проработает время, не меньше заданного числа t.

Математические законы теории вероятностей не являются беспредметными абстракциями, они выражают собой математическое выражение реальных закономерностей, фактически существующих в массовых случайных явлениях.

4.1 Классификация событий

Одним из основных понятий теории вероятностей является **понятие события**.

> **Под событием понимают любой факт, который может произойти в результате опыта или испытания**.

Под опытом, или испытанием, понимается осуществление определённого комплекса условий.

Примеры событий:

– попадание в цель при выстреле из орудия (опыт – произведение выстрела; событие – попадание в цель);

– выпадение двух гербов при трёхкратном бросании монеты (опыт – трёхкратное бросание монеты; событие – выпадение двух гербов);

– появление ошибки измерения в заданных пределах при измерении дальности до цели (опыт – измерение дальности; событие – ошибка измерения).

События, как правило, обозначаются заглавными буквами латинского алфавита A, B, C и т д.

Событие называется ***достоверным***, если оно обязательно произойдет в условиях данного опыта. Причины достоверного события очевидны и поддаются точному учету. Например, совершенно достоверным является факт работы исправного насоса, если к нему подключен исправный электромотор, к контактам которого приложено напряжение.

Событие называется ***невозможным***, если оно не может произойти в условиях данного опыта. Например, событие, заключающееся в том, что из партии стандартных деталей будет взята стандартная деталь, является достоверным, а нестандартная – невозможным; если в сети отсутствует напряжение, то работа мотора, питающегося от этой сети, является событием невозможным.

Событие называется ***возможным***, или ***случайным***, если в результате опыта оно может появиться, но может и не появиться. Примером случайного события может служить выявление дефектов изделия при контроле партии готовой продукции, несоответствие размера обрабатываемого изделия заданному, отказ одного из звеньев автоматизированной системы управления.

> **Т.о., отказ и отсутствие отказа – это основные случайные события, изучаемые наукой о надежности.**

События называются ***равновозможными***, если по условиям испытания ни одно из этих событий не является объективно более возможным, чем другие. Например, пусть магазину поставляют электролампочки (причем в равных количествах) несколько заводов-изготовителей. События, состоящие в покупке лампочки любого из этих заводов, равновозможны.

Важным понятием является ***полная группа событий***. **Несколько событий в данном опыте образуют полную группу, если в результате опыта обязательно появится хотя бы одно из них**. Например, в урне находится десять шаров, из них шесть шаров красных, четыре белых, причем пять шаров имеют номера. A – появление красного шара при одном извлечении, B – появление белого шара, C – появление шара с номером. События A, B, C образуют полную группу совместных событий.

Различают события ***совместные*** и ***несовместные***. **События называются *совместными*, если наступление одного из них не исключает наступления другого. В противном случае события называются несовместными**.

Например, подбрасываются две игральные кости. Событие A – выпадение трех очков на первой игральной кости, событие B – выпадение трех очков на второй кости. A и B – совместные события.

Пусть в магазин поступила партия обуви одного фасона и размера, но разного цвета. Событие A – наудачу взятая коробка окажется с обувью черного цвета, событие B – коробка окажется с обувью коричневого цвета, A и B – несовместные события.

Рассматривая случаи появления или отсутствия события A в большом числе испытаний, можно установить определенные закономерности появления этого события. Если при проведении n_1 испытаний событие A имело место m_1 раз, то *относительную частоту* появления события A определяют из соотношения

$$P^*(A) = \frac{m_1}{n_1} \quad . \tag{4.1}$$

Если событие A имело место в каждом из n_1, испытаний, т. Е. $m_1 = n_1$, то $P^*(A) = 1$. Если событие A не наступило ни в одном из n_1, испытаний, т. Е. $m_1 = 0$, то $P^*(A) = 0$. При проведении серии последовательных испытаний получим соотношения:

$$P_1^* = \frac{m_1}{n_1}; \quad P_2^* = \frac{m_2}{n_2}; \ldots; \; P_i^* = \frac{m_i}{n_i} .$$

Относительная частота становится более устойчивой при увеличении числа испытаний. Такая закономерность была замечена давно и подтверждена результатами решения различных примеров. Самыми известными примерами являются примеры бросания монеты или игральной кости. Так, при большом числе бросаний монеты относительная частота выпадения герба равна 1/2 и равна относительной частоте выпадения цифры. При большом числе бросаний игральной кости относительная частота выпадения каждой стороны, на которой изображены цифры от 1 до 6, равна 1/6.

Приведенные примеры показывают, что существует постоянная величина (в нашем случае 1/2 или 1/6), около которой колеблется относительная частота свершения случайного события и к которой она все более приближается с увеличением числа испытаний. Постоянную величину, к которой приближается относительная частота случайного события, называют ***вероятностью случайного события А*** и обозначают символом ***P*(*A*).**

Вероятность характеризует событие по степени его возможности. Вероятность есть численной мерой степени объективной возможности данного события.

***Вероятностью случайного события называется число, около которого группируются частоты этого события по мере увеличения числа испытаний*).**

На практике при большом числе испытаний вероятность случайного события приближенно принимают равной относительной частоте этого события:

$$P(A) \approx P^{*}(A).$$

Математическим основанием этого утверждения является *закон больших чисел* (Я. Бернулли) – вероятность отклонения относительной частоты некоторого события A от вероятности $P(A)$ этого события более чем на произвольно заданную величину $\varepsilon > 0$ становится сколь угодно малой, если число испытаний n неограниченно возрастает.

Таким образом, вероятность события $P(A)$ представляет собой число, заключенное в интервале от нуля до единицы, т. Е. справедливо неравенство

$$0 \le P(A) \le 1. \qquad (4.2)$$

*

Пример 4.1. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наудачу. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

Решение. Обозначим A событие, состоящее в том, что набрана нужная цифра. Абонент мог набрать любую из 10 цифр, поэтому общее число возможных исходов равно 10. Эти исходы единственно возможны (одна из цифр набрана обязательно) и равновозможны (цифра набрана наудачу). Благоприятствует событию A лишь один исход (нужная цифра лишь одна). Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех исходов:

$$P\{A\} = 1/\,10 = 0{,}1.$$

*

Введем понятие противоположного, или дополнительного, события. Под ***противоположным*** событием $\overline{A}$ понимается событие, которое обязательно должно произойти, если не наступило некоторое событие A.

Противоположные события несовместны и единственно возможны. Они образуют полную группу событий. Например, если партия изготовленных изделий состоит из годных и бракованных, то при извлечении одного изделия оно может оказаться либо годным – событие A, либо бракованным – событие $\overline{A}$.

4.2 Основные теоремы теории вероятностей

Для определения вероятностей событий применяются не непосредственные прямые методы, а косвенные, позволяющие по известным вероятностям одних событий определять вероятности других событий, с ними связанных.

Косвенные методы используют основные теоремы теории вероятностей: теорему сложения вероятностей и теорему умножения вероятностей.

Суммой двух событий *A* и *B* называется событие C, состоящее в выполнении события A или события B, или обоих вместе. Суммой несколько событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Произведением двух событий *A* и *B* называется событие C, состоящее в совместном выполнении события A и события B. Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

При определении вероятностей приходится часто представлять сложные события в виде комбинаций более простых событий, применяя и операцию сложения, и опрерацию умножения событий.

4.2.1 Теорема сложения вероятностей. *Вероятность суммы двух* ***несовместных*** *событий равна сумме вероятностей этих событий*

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \tag{4.3}$$

Метод полной индукции позволяет использовать теорему сложения для произвольного числа несовместных событий. Так, *вероятность суммы нескольких событий* равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n). \tag{4.4}$$

Более удобная запись теоремы сложения:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{4.5}$$

С л е д с т в и е 1. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=1. \tag{4.6}$$

Противоположными событиями называют два несовместных события, образующих *полную группу.*

С л е д с т в и е 2. *Сумма вероятностей противоположных событий* равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \tag{4.7}$$

где $\overline{A}$ — событие, противоположное событию A.

*

Пример 4.1. Вероятность того, что в магазине будет продана пара мужской обуви 44-го размера, равна 0,12; 45-го – 0,04; 46-го и большего – 0,01. Найти вероятность того, что будет продана пара мужской обуви не меньше 44-го размера.

Решение. Искомое событие D произойдет, если будет продана пара обуви 44-го размера (событие A) или 45-го (событие B), или не меньше 46-го (событие C), т. е. событие D есть сумма событий A, B, C. События A, B, и C несовместны. Поэтому согласно теореме о сумме вероятностей получаем

$$P(D) = P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0{,}12 + 0{,}04 + 0{,}01 = 0{,}17.$$

Пример 4.2. При условиях примера 1 найти вероятность того, что очередной будет продана пара обуви меньше 44-го размера.

Решение. События «очередной будет продана пара обуви меньше 44-го размера» и «будет продана пара обуви размера не меньше 44-го» противоположные. Поэтому по формуле (4.7) вероятность наступления искомого события

$$P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}17 = 0{,}83,$$

поскольку $P\{D\} = 0{,}17$, как это было найдено в примере 4.1.

*

Вероятность суммы двух ***совместных*** *событий A и B* выражается формулой

$$P(A+B) = P(A)+P(B) - P(AB). \quad (4.8)$$

Аналогично *вероятность суммы трех совместных событий* определяется выражением

$$P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC)+P(ABC). \quad (4.9)$$

Вероятность суммы любого числа совместных событий определяется выражением

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i,j} P(A_i A_j) + \sum_{i,j,k} P(A_i A_j A_k) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n). \quad (4.10)$$

Аналогичную формулу можно написать для *произведения двух событий:*

$$P(AB)=P(A)+P(B) - P(A+B); \quad (4.11)$$

для ***произведения трех событий***:

$$P(ABC)=P(A)+ P(B)+ P(C) - P(A+B) - P(A+C) - P(B+C)+P(A+B+C). \quad (4.12)$$

Общая формула, выражающая *вероятность произведения произвольного числа событий* через вероятности сумм этих событий, взятых по одному, по два, по три и т. Д., имеет вид:

$$\begin{aligned} P(A_1 A_2 \ldots A_n) &= \sum_{i} P(A_i) - \sum_{i,j} P(A_i + A_j) + \sum_{i,j,k} P(A_i + A_j + A_k) + \ldots \\ &\ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) \end{aligned}. \quad (4.13)$$

*

Пример 4.3. Пусть проводится стрельба из артиллерийского орудия по щиту с двумя зонами попадания. Вероятность попадания в первую зону при одном выстреле равна 0,40, во вторую 0,35. Найти вероятность промаха.

Решение. Обозначим через A – попадание, а через $\overline{A}$ – промах. Тогда событие $A = A_1 + A_2$, где A_1 и A_2 – попадания соответственно в первую и вторую зоны. Используя формулу (4.3), найдем

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = 0{,}40 + 0{,}35 = 0{,}75.$$

Тогда $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$.

<u>*Пример 4.4.*</u> Техническое устройство состоит из трех элементов A_1, A_2 и B. Элементы A_1 и A_2 дублируют друг друга. Это означает, что при отказе одного из них происходит автоматическое переключение на второй. Элемент B не дублирован. Устройство прекращает работу в том случае, когда отказывают оба элемента A_1 и A_2 либо отказывает элемент B. Таким образом, отказ устройства можно представить в виде события $C = A_1A_2 + B$, где событие A_1 является отказом элемента A_1, A_2 – отказом элемента A_2 и B – отказом элемента B. Требуется выразить вероятность события C через вероятности событий, содержащих только суммы.

Решение. В соответствии с формулой (4.8) имеем

$$P(C) = P(A_1A_2) + P(B) - P(A_1A_2B).$$

Используя формулу (4.11), определим

$$P(A_1A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 + A_2).$$

Далее, применяя формулу (4.12), получим

$$P(A_1A_2B) = P(A_1) + P(A_2) + P(B) - P(A_1 + A_2) - P(A_1 + B) -$$
$$-P(A_2 + B) + P(A_1 + A_2 + B).$$

Подставляя полученные выражения и сокращая, находим

$$P(C) = P(A_1 + B) + P(A_2 + B) - P(A_1 + A_2 + B).$$

*

4.2.2 Теорема умножения вероятностей. События могут быть независимыми и зависимыми.

Событие A называют ***независимым*** от события *B,* если вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет.

Событие A называют ***зависимым*** от события *B,* если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.

*

<u>*Пример 4.5.*</u> Предположим, что опыт состоит в бросании двух монет, при этом рассматривают следующие события: событие A – появление герба на первой монете и событие B – появление герба на второй монете.

В этом случае вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет, следовательно, событие A независимо от события B.

<u>*Пример 4.6.*</u> Пусть в урне имеется два белых и один черный шар. Два человека вынимают из урны по одному шару, при этом рассматриваются следующие события: событие A – появление белого шара у первого человека и событие B – появление белого шара у второго человека.

Вероятность события A до того, как станет известно что-либо о событии *B,* равна 2/3. Если стало известно, что событие B произошло, то вероятность события A становится равной 1/2, из чего заключаем, что событие A зависит от события B.

*

Вероятность события A, вычисленная при условии, что имело место другое событие B, называется ***условной вероятностью события*** A и обозначается $P(A|B)$.

Для условий примера $P(A) = 2/3$, $P(A|B) = 1/2$.

*

<u>*Пример 4.7.*</u> В ящике находятся 5 резцов: два изношенных и три новых. Производится два последовательных извлечения резцов. Определить условную вероятность появления изношенного резца при втором извлечении при условии, что извлеченный в первый раз резец в ящик не возвращается.

Решение. Обозначим A извлечение изношенного резца в первом случае, а $\overline{A}$ – извлечение нового.

Тогда $P\{A\} = 2/5$, $P\{\overline{A}\} = 1 - 2/5 = 3/5$.

Поскольку извлеченный резец в ящик не возвращается, то изменяется соотношение между количествами изношенных и новых резцов. Следовательно, вероятность извлечения изношенного резца во втором случае зависит от того, какое событие осуществилось перед этим.

Обозначим B событие, означающее извлечение изношенного резца во втором случае. Вероятности этого события могут быть такими:

$$P\{B|A\} = 1/4, \qquad P\{B|\overline{A}\} = 2/4 = 1/2.$$

Следовательно, вероятность события B зависит от того, произошло или нет событие A.

*

Теорема умножения вероятностей формулируется следующим образом: ***вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место,*** т. е.

$$P(AB) = P(A)P(B|A). \tag{4.14}$$

Очевидно, что при применении теоремы умножения безразлично, какое из событий – A или B – считать первым, а какое вторым, и теорему можно записать так:

$$P(AB) = P(B)P(A|B).$$

***Два события* называют *независимыми,* если появление одного из них не изменяет вероятности появления другого.**

Понятие независимых событий может быть распространено на случай произвольного числа событий. *Несколько событий* называют *независимыми,* если любое из них не зависит от любой совокупности остальных.

***Вероятность произведения двух независимых событий* равна произведению вероятностей этих событий**.

Теорема умножения вероятностей может быть обобщена на случай произвольного числа событий.

Вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятностей этих событий, причем вероятность каждого следующего по порядку события вычисляют при условии, что все предыдущие имели место:

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1}). \qquad (4.15)$$

В случае **независимых** событий теорема упрощается и принимает вид:

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2)...P(A_n), \qquad (4.16)$$

т. е. вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Применяя знак произведения, теорему можно записать так:

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i). \qquad (4.17)$$

*

<u>*Пример 4.8.*</u> Устройство состоит из пяти приборов, каждый из которых, независимо от других, может в течение времени t отказать. Отказ хотя бы одного прибора приводит к отказу устройства. За время t вероятность безотказной работы каждого из приборов соответственно равна $P_1(t) = 0,95$; $P_2(\mathrm{t}) = 0,99$; $P_3(t) =0,98$; $P_4(t) = 0,90$; $P_5(t) = 0,93$. Найти надежность устройства за время работы t.

Решение. Введем обозначения вероятностей безотказной работы первого – пятого приборов: $A_1 - A_5$.

Имеем: $A = A_1A_2A_3A_4A_5$.

По формуле умножения для независимых событий (4.26) получим:

$$P(A)=P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3)\,P(A_4)\,P(A_5) = 0,95 \cdot 0,99 \cdot 0,98 \cdot 0,90 \cdot 0,93 = 0,76.$$

<u>*Пример 4.9*</u>**.** Производят три выстрела по одной и той же мишени. Вероятность попадания при первом – третьем выстрелах соответственно равна: $P_1 = 0,8$; $P_2 = 0,6$; $P_3 = 0,3$; Найти вероятность того, что в результате этих трех выстрелов в мишени будет хотя бы одна пробоина.

Решение. Рассмотрим событие B – хотя бы одно попадание в мишень. Представим событие B в виде суммы несовместных вариантов:

$$B = A_1\overline{A_2}A_3 + A_1A_2\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2A_3 + A_1A_2A_3,$$

где A_1, A_2, A_3 – попадания при первом – третьем выстрелах; $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$ – промах при первом –третьем выстрелах.

Вероятность каждого варианта находим по теореме умножения, а затем используем теорему сложения:

$$P(B) = P(A_1)\,P(\overline{A_2})\,P(A_3) + P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(A_1)\,P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) +$$
$$+ P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3) + P(\overline{A_1})P(A_2)\,P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(A_2)\,P(A_3) + P(A_1)P(A_2)P(A_3) =$$
$$= 0,8 \cdot (1 - 0,6) \cdot 0,3 + 0,8 \cdot 0,6 \cdot (1 - 0,3) + 0,8 \cdot (1 - 0,6) \cdot (1 - 0,3) +$$
$$+(1 - 0,8) \cdot (1 - 0,6) \cdot 0,3 + (1 - 0,8) \cdot 0,6 \cdot (1 - 0,3) +(1 - 0,8) \cdot 0,6 \cdot 03 + 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,3 = 0,946.$$

<u>*Пример*</u> <u>*4.10*</u>**.** Три ящика содержат по 10 деталей. В первом ящике – 8 стандартных деталей, во втором – 7, в третьем – 9. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.

Решение. Вероятность того, что из первого ящика взята стандартная деталь (событие A), $P(A) = 8/10 = 4/5$. Вероятность того, что из второго ящика взята стандартная деталь (событие B), $P(B) = 7/10$. Вероятность того, что из третьего ящика взята стандартная деталь (событие C), $P(C) = 9/10$. Так как события A, B и C независимые в совокупности, то искомая вероятность (по теореме умножения)

$$P(ABC) = P(A)\,P(B)\,P(C) = 4/5 \cdot 7/10 \cdot 9/10 = 0,504.$$

Пример 4.11. В урне находятся 5 белых шаров, 4 черных и 3 синих. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его в урну. Найти вероятность того, что при первом испытании появится белый шар (событие A), при втором – черный (событие B) и при третьем – синий (событие C).

Решение. Вероятность появления белого шара при первом испытании $P(A) = 5/12$. Вероятность появления черного шара при втором испытании, вычисленная в предположении, что при первом испытании появился белый шар, т. е. условная вероятность $P(B|A) = 4/11$. Вероятность появления синего шара при третьем испытании, вычисленная в предположении, что при первом испытании появился белый шар, а при втором – черный, $P(C|AB) = 3/10$. Искомая вероятность:

$$P(ABC) = P(A)\,P(B|A)\,P(C|AB) = 5/12 \cdot 4/11 \cdot 3/10 = 0{,}045.$$

*

4.2.3. Формула полной вероятности. Следствием обеих основных теорем – теоремы сложения вероятностей и теоремы умножения вероятностей – является ***формула полной вероятности.***

Пусть требуется определить вероятность некоторого события *A,* которое может произойти вместе с одним из событий: H_1, H_2, ... , H_n, образующих полную группу несовместных *событий,* ***называемых гипотезами****. В* этом случае

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i) = 1, \tag{4.18}$$

т. е. вероятность события A вычисляется как сумма произведений вероятности каждой гипотезы на вероятность события при этой гипотезе.

Формулу (4.18) называют ***формулой полной вероятности,*** что можно доказать следующим образом.

Гипотезы $H_1, H_2, ..., H_n$ образующих полную группу, поэтому событие A может появиться только в комбинации с какой-либо из этих гипотез, т. е.

$$A = H_1A + H_2A + ... + H_nA.$$

Так как гипотезы H_1, H_2, ... , H_n несовместны, то и комбинации $H_1A + H_2A + ... + H_nA$ также несовместны. Применяя теорему сложения, получим для этих гипотез:

$$P(A) = P(H_1A) + P(H_2A) + ... + P(H_nA) = \sum_{i=1}^{n} P(H_iA).$$

Применяя к событию HA теорему умножения, получим

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i),$$

что и требовалось доказать.

*

Пример 4.12. По движущемуся танку производят три выстрела из артиллерийского орудия. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,5; при втором – 0,7; при третьем – 0,8. Для вывода танка из строя заведомо достаточно трех попаданий. При одном попадании танк выходит из строя с вероятностью 0,3; при двух попаданиях – с вероятностью 0,9. Определить вероятность того, что в результате трех выстрелов танк выйдет из строя.

Решение. Рассмотрим четыре гипотезы: H_0 – в танк не попало ни одного снаряда. H_1 –

в танк попал один снаряд, H_2 – в танк попало два снаряда и H_3 – в танк попало три снаряда.

Пользуясь теоремами сложения и умножения, найдем вероятности этих гипотез:

$$P(H_0) = 0{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}03;$$
$$P(H_1) = 0{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}22;$$
$$P(H_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}47;$$
$$P(H_3) = 0{,}5 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}28.$$

Условные вероятности события A (выход из строя танка) при этих гипотезах равны:

$P(A|H_0) = 0$; $P(A|H_1) = 03$; $P(A|H_2) = 0{,}9$; $P(A|H_3) = 1{,}0$. Применяя формулу полной вероятности, получим

$$P(A) = P(H_0) \cdot P(A|H_0) + P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3) =$$
$$= 0{,}03 \cdot 0 + 0{,}22 \cdot 0{,}3 + 0{,}47 \cdot 0{,}9 + 0{,}28 \cdot 1{,}0 = 0{,}769.$$

Пример 4.13. На сборочный конвейер поступают детали с трех станков. Производительность станков не одинакова. На первом станке изготовляют 50% всех деталей, на втором – 30%, на третьем – 20%. Вероятность качественной сборки при использовании детали, изготовленной на первом, втором и третьем станке, соответственно 0,98, 0,95 и 0,8, Определить вероятность того, что узел, сходящий с конвейера, качественный.

Решение. Обозначим A событие, означающее годность собранного узла; B_1, B_2 и B_3 – события, означающие, что детали сделаны соответственно на первом, втором и третьем станке. Тогда

$$P(B_1) = 0{,}5; \quad P(B_2) = 0{,}3; \quad P(B_3) = 0{,}2;$$
$$P(A|B_1) = 0{,}98; \quad P(A|B_2) = 0{,}95; \quad P(A|B_3) = 0{,}8;$$

Искомая вероятность:

$$P(A) = P(B_1)\,P(A|B_1) + P(B_2)\,P(A|B_2) + P(B_3)\,P(A|B_3) = 0{,}5 \cdot 0{,}98 + 0{,}3 \cdot 0{,}95 + 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}935.$$

*

4.3 Формула Байеса

Эта формула применяется при решении практических задач, когда событие A, появляющееся совместно с каким-либо из событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу событий, произошло и требуется провести количественную переоценку вероятностей гипотез $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Априорные (до опыта) вероятности $P(B_1), P(B_2), \ldots, P(B_n)$ известны. Требуется вычислить апостериорные (после опыта) вероятности, т. е., по существу, нужно найти условные вероятности $P(B_1|A), P(B_2|A), \ldots, P(B_n|A)$. Для гипотезы B_j формула Байеса принимает вид:

$$P\left(B_j \middle| A\right) = \frac{P\left(B_j\right)P\left(A \middle| B_j\right)}{P(A)}.$$

Раскрывая в этом равенстве $P(A)$ по формуле полной вероятности (4.18), получаем

$$P\left(B_j \middle| A\right) = \frac{P\left(B_j\right)P\left(A \middle| B_j\right)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(B_i\right)P\left(A \middle| B_i\right)}.$$

*

Пример 4.14. При условиях примера 4.13 рассчитать вероятности того, что в сборку попала деталь, изготовленная соответственно на первом, втором и третьем станке, если узел, сходящий с конвейера, качественный.

Решение. Рассчитаем условные вероятности по формуле Байеса:

для первого станка

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{0{,}5\cdot 0{,}98}{0{,}935}\approx 0{,}525;$$

для второго станка

$$P(B_2|A)=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=\frac{0{,}3\cdot 0{,}95}{0{,}935}\approx 0{,}304;$$

для третьего станка

$$P(B_3|A)=\frac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(A)}=\frac{0{,}2\cdot 0{,}8}{0{,}935}\approx 0{,}171.$$

*

4.4 Формула Бернулли

Воспользуемся понятием **сложного события**, под которым подразумевается совмещение нескольких элементарных событий, состоящих в появлении или не появлении события A в i–м испытании.

Пусть проводится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может либо появиться с вероятностью p, либо не появиться с вероятностью $q = 1 - p$. Рассмотрим событие B_m, состоящее в том, что событие A в этих n испытаниях наступит ровно m раз и, следовательно, не наступит ровно $(n - m)$ раз. Обозначим A_i (i = 1, 2, …, n) появление события A, а $\overline{A}_i$ – непоявление события A в i–м испытании. В силу постоянства условий испытания имеем

$$P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n) = p,$$
$$P(\overline{A}_1) = P(\overline{A}_2) = \ldots = P(\overline{A}_n) = 1 - p = q.$$

Событие A может появиться m раз в разных последовательностях или комбинациях, чередуясь с противоположным событием $\overline{A}$. Число возможных комбинаций такого рода равно числу сочетаний из n элементов по m, т. е. C^m_n. Следовательно, событие B_m можно представить в виде суммы сложных несовместных между собой событий, причем число слагаемых равно C^m_n:

$$B_m = A_1 A_2 \ldots A_m \overline{A}_{m+1} \ldots \overline{A}_n + \ldots + \overline{A}_1 \overline{A}_2 \ldots \overline{A}_{n-m} A_{n-m+1} \ldots A_n, \qquad (4.19)$$

где в каждое произведение событие A входит m раз, а $\overline{A}$ – $(n - m)$ раз.

Вероятность каждого сложного события, входящего в формулу (4.19), по теореме умножения вероятностей для независимых событий равна $p^m q^{n-m}$. Так как общее количество таких событий равно C_n^m, то, используя теорему сложения вероятностей для несовместных событий, получаем вероятность события B_m (обозначим ее $P_{m,n}$):

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{4.20}$$

где $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$; число сочетаний из из n элементов по m, $q = 1 - p$. Также коэффициенты C_n^m называют биномиальными коэффициентами, поскольку они являются коэффициентами в разложении бинома Ньютона.

Формулу (4.20) называют формулой Бернулли, а повторяющиеся испытания, удовлетворяющие условию независимости и постоянства вероятностей появления в каждом из них события *A*, называют испытаниями Бернулли, или схемой Бернулли.

*

Пример 4.15. Вероятность выхода за границы поля допуска при обработке деталей на токарном станке равна 0,07. Определить вероятность того, что из пяти наудачу отобранных в течение смены деталей у одной размеры диаметра не соответствуют заданному допуску.

Решение. Условие задачи удовлетворяет требования схемы Бернулли. Поэтому, полагая $n = 5$, $m = 1$, $p = 0{,}07$, по формуле (4.20) получаем

$$P_{1,5} = C_5^1 (0{,}07)^1 (0{,}93)^{5-1} \approx 0{,}262.$$

Пример 4.16. При проведении стрельб из орудия по щиту было зафиксировано десять промахов ($m = 10$) из пятисот выстрелов ($n = 500$).
Определить вероятность того, что при ста выстрелах будет ровно четыре промаха, если считать, что все выстрелы независимы и вероятность промаха в каждом выстреле одинакова.

Решение. Найдем вероятность промаха при одном выстреле по формуле

$$P = m/n = 10/500 = 0{,}02.$$

Далее по формуле (4.20) найдем вероятность появления четырех промахов из ста выстрелов

$$P_{4,100} = \mathrm{C}^4_{100} \cdot 0{,}02^4 \cdot 0{,}98^{100-4} = 0{,}0902.$$

*

4.5 Элементы комбинаторики в теории надежности

В теории вероятностей часто используют размещения, перестановки и сочетания. Если дано множество $M = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$, то ***размещением*** (***сочетанием***) из n элементов по k называется любое упорядоченное (неупорядоченное) подмножество k элементов множества M. При $k = n$ размещение называется перестановкой из n элементов.

Пусть, например, дано множество $\{w_1, w_2, w_3\}$. Размещениями из трех элементов этого множества по два являются $\{w_1, w_2\}$, $\{w_1, w_3\}$, $\{w_2, w_1\}$, $\{w_2, w_3\}$, $\{w_3, w_1\}$, $\{w_3, w_2\}$; сочетаниями — $\{w_1, w_2\}$, $\{w_1, w_3\}$, $\{w_2, w_3\}$.

Два сочетания различаются хотя бы одним элементом, а размещения различаются либо самими элементами, либо порядком их следования. Число сочетаний из n элементов по k вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

где $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)...(n-k+1)$ есть число размещений из n элементов по k; $P_k = k!$ — число перестановок из k элементов.

*

Пример 4.17. В партии из 10 деталей имеется 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу 6 деталей ровно 4 стандартных.

Решение. Общее число возможных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь 6 деталей из 10, т. е. равно $C^6{}_{10}$ — числу сочетаний из 10 элементов по 6. Число исходов, благоприятствующих событию A (среди 6 взятых деталей ровно 4 стандартных), определяем так: 4 стандартные детали можно взять из 7 стандартных деталей $C^4{}_7$ способами; при этом остальные 6 – 4 = 2 детали должны быть нестандартными; взять же 2 нестандартные детали из 10 – 7 = 3 нестандартных деталей можно $C^2{}_3$ способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно $C^4{}_7C^2{}_3$.

Исходная вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех исходов:

$$P(A) = C^4{}_7C^2{}_3 \,/\, C^6{}_{10} = 0{,}5.$$

*

Вопросы для самоконтроля.

1. Дайте определение события, случайного события. Приведите примеры классификации событий. Как определяется вероятность случайного события?
2. Приведите примеры, иллюстрирующие положения теоремы сложения вероятностей
3. Приведите примеры, иллюстрирующие положения теоремы умножения вероятностей.
4. Формула полной вероятности и ее доказательство.
5. Определение вероятности сложного события.

5 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ БЕЗОТКАЗНОСТИ

Любой анализ надежности системы должен основываться на точно определенных понятиях. Известно, что даже у одинаковых систем, работающих в аналогичных условиях, отказы происходят в случайные различные моменты времени, т.е. отказы могут быть описаны только в терминах теории вероятностей. Т.о., основные определения надежности основываются главным образом, на понятиях теории вероятности.

Вероятность безотказной работы $P(t)$ – это такая функция времени, которая определяет вероятность того, что невосстанавливаемая система будет выполнять требуемую функцию в заданный момент времени t.

ВБР определяется в предположении, что в начальный момент времени (момент начала исчисления наработки) объект находился в работоспособном состоянии.

Ее можно записать в виде

$$P(t) = \frac{N_0 - n(t)}{N_0}, \tag{5.1}$$

где N_0 – число единиц одинакового оборудования, работающего в одинаковых условиях; $n(t)$ – число отказов в контрольной группе.

Возникновение первого отказа – случайное событие, а наработка t от начального момента до возникновения этого события – случайная величина.

Наряду с понятием «вероятность безотказной работы» часто используют понятие «вероятность отказа», которое определяется следующим образом: это вероятность того, что объект откажет хотя бы один раз в течение заданной наработки, будучи работоспособным в начальный момент времени.

Вероятность отказа $Q(t)$ – это вероятность того, что система выйдет из строя к моменту времени t. Она связана с вероятностью безотказной работы $P(t)$ простым соотношением:

$$Q(t) + P(t) = 1. \tag{5.2}$$

Тогда вероятность отказа

$$Q(t) = 1 - P(t).$$

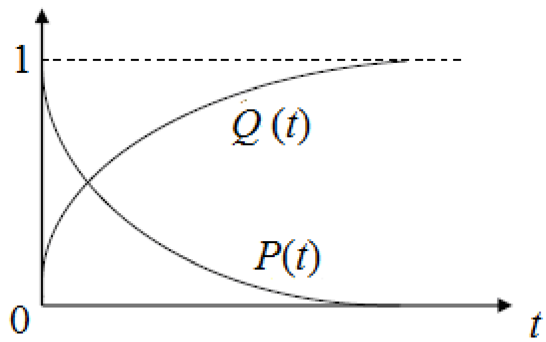


Рисунок 5.1 – Графики вероятности безотказной работы и отказа

Таким образом, в простейшем случае, при определении вероятности отказа и вероятности безотказной работы к заданному моменту времени необходимо знать в качестве исходных данных число единиц оборудования в контрольной группе в начальный момент времени, а также количество вышедших из строя образцов.

*

<u>*Пример 5.1.*</u> На испытания поставлено N_0 = 450 однотипных центробежных насосов. За время t = 10 часов отказало $n(t)$ = 10 шт. Определить вероятность отказа и вероятность безотказной работы.

Вероятность безотказной работы

$$P(t) = (450 - 10)/450 = 0{,}978.$$

Вероятность отказа

$$Q(t) = 1 - 0{,}978 = 0{,}022.$$

*

Частота отказов. Вероятность безотказной работы $P(t)$ связана с **функцией распределения** $F(t)$ и **плотностью распределения** $f(t)$ наработки до отказа:

$$F(t) = 1 - P(t);\ f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dP(t)}{dt}. \qquad (5.3)$$

Для дискретной случайной величины X, которая может принимать значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, функция распределения имеет вид

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i), \qquad (5.4)$$

где неравенство $x_i < x$ означает, что суммирование распространяется на все значения x_i, меньше x. Из этой формулы следует, что функция распределения дискретной случайной величины представляет собой ступенчатую ломаную линию (рис. 5.2). При каждом новом значении случайной величины ступень поднимается выше на величину, равную вероятности этого значения. Сумма всех скачков функции распределения равна единице.

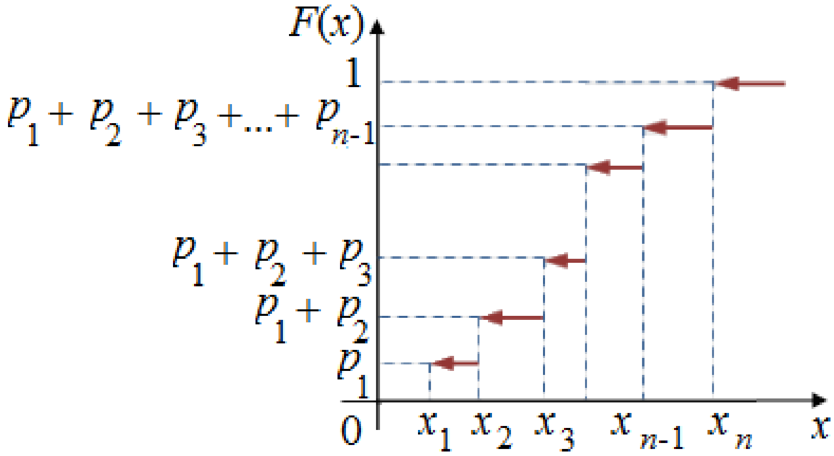


Рисунок 5.2 – Вид графика функции распределения для дискретной величины

Непрерывная случайная величина имеет непрерывную функцию распределения, график этой функции имеет форму плавной кривой (рис. 5.3).

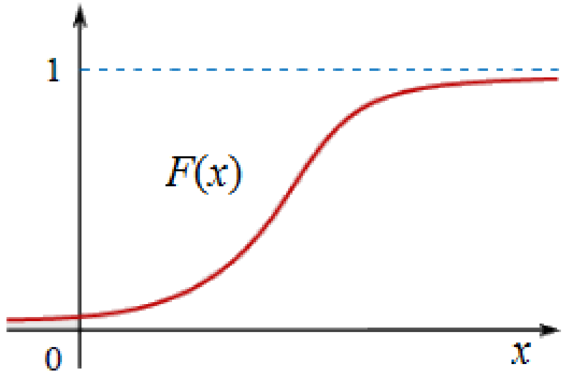


Рисунок 5.3 – Вид графика функции распределения для непрерывной величины

Смысл плотности распределения $f(x)$ состоит в том, что она указывает на то, как часто случайная величина X появляется в некоторой окрестности точки x при повторении опытов.

Кривая, изображающая плотность распределения $f(x)$ случайной величины, называется ***кривой распределения.***

Если случайная величина t (наработка до отказа) имеет плотность распределения $f(t)$, то вероятность безотказной работы:

$$P(t) = 1 - Q(t) = 1 - \int_0^t f(t)dt\,. \tag{5.5}$$

Иначе, другими словами, частота отказов или плотность вероятности отказов $f(t)$ представляет собой отношение числа отказавших элементов (например, аппаратов) к числу первоначально установленных N_0 за единицу времени Δt.

$$f(t) = \frac{n(t)}{N_0 \Delta t}\,. \tag{5.6}$$

Физический смысл плотности распределения – вероятность попадания случайной величины в малый интервал числовой оси пропорциональна плотности распределения этой величины на данном интервале.

В начальный промежуток времени функция распределения растет быстро и соответственно плотность распределения велика. Это означает, что число отказов достаточно велико. По мере возрастания t скорость возрастания функции распределения (плотность распределения) уменьшается, т.е. число отказов уменьшается.

Вероятность отказа за $t_1 \div t_2$ равна площади под соответствующим участком кривой распределения.

Для общего случая, когда непрерывная случайная величина может иметь не только положительное, но и отрицательное значение, можем записать

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Т.е., интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения равен единице, физически это выражение означает, что случайная величина примет какое-нибудь значение, лежащее в пределах от $-\infty$ до $+\infty$.

Интенсивность отказов. Наиболее употребительной в теории надежности является такая характеристика как интенсивность отказов, которая характеризует частоту появления отказов в этом интервале в некотором промежутке времени $[t_1, t_2]$.

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)}. \tag{5.7}$$

Т.е. является *условной плотностью распределения вероятности* исправной работы системы, вычисленной при условии, что к моменту t система была исправна.

Интенсивность отказов определяется вероятностью того, что в этом интервале произойдет отказ за единицу времени при условии, что отказ не произошел до момента времени t_1, с которого начинается этот интервал. Таким образом, интенсивность отказов $\lambda(t)$ имеет вид

$$\frac{P(t_1) - P(t_2)}{(t_2 - t_1)P(t_1)} = \frac{P(t) - P(t + \Delta t)}{\Delta t P(t)}$$

при условии, что $[t_1, t_2] = [t, t + \Delta t]$

Принимая, что интенсивность отказов $\lambda(t)$ выражает качественные изменения, происходящие в оборудовании во время его эксплуатации, выражение для определения интенсивности можно записать в следующем виде

$$\lambda(t) = \frac{n(\Delta t)}{N_{cp}(t)\Delta t}, \tag{5.8}$$

где $n(\Delta t)$ – число отказов за время Δt; $N_{ср}(t)$ – среднее число действующих в этот период времени аппаратов.

Для практического применения в определении различных показателей надежности и для целей прогнозирования величины ее показателей очень важно знать вид и характер функции интенсивности отказов $\lambda(t)$. Многолетние исследования в этом направлении показали, что качественный характер этой функции для инженерных расчетов имеет следующий вид (рис. 5.4).

Рисунок 5.4 – Вид и характер функции интенсивности отказов

Типичная функция интенсивности отказов может быть разделена на три периода.

Первый, сравнительно небольшой по времени период, где наблюдается сильное уменьшение интенсивности отказов – период приработки изделия.

Второй – характеризуется постоянным значением интенсивности отказов – период нормальной эксплуатации.

Третий, в течение которого интенсивность отказов постоянно увеличивается – период катастрофических износов (или закономерных постепенных отказов).

*

Пример 5.2. На испытания поставлено N_0 = 200 объектов, испытания проводились в течение t = 100 ч. Результаты испытаний сведены в таблицу. Построить кривую интенсивности отказов по результатам испытаний объекта.

Решение.

Результаты испытаний объекта (к примеру.)

№ п/п	Δt, ч	$n(\Delta t)$	$N_{ср}(t)$	№ п/п	Δt, ч	$n(\Delta t)$	$N_{ср}(t)$
1	0 – 10	10	190	6	50 – 60	2	168
2	10 – 20	8	182	7	60 – 70	2	166
3	20 – 30	6	176	8	70 – 80	4	162
4	30 – 40	4	172	9	80 – 90	5	157
5	40 – 50	2	170	10	90 – 100	8	149

Обозначения: Δt – интервал испытаний; $n(\Delta t)$ – число отказов; $N_{ср}(t)$ – число неотказавших элементов на этот период времени.

Для построения кривой вычислим интенсивность отказов $\lambda(t)_i$ ч$^{-1}$ по формуле (4.8):

$\lambda(t_1) = 10/(10\cdot190) = 0{,}0052$;
$\lambda(t_2) = 8/(10\cdot182) = 0{,}0044$;
$\lambda(t_3) = 6/(10\cdot176) = 0{,}0034$;
$\lambda(t_4) = 4/(10\cdot172) = 0{,}0023$;
$\lambda(t_5) = 2/(10\cdot170) = 0{,}0011$;
$\lambda(t_6) = 2/(10\cdot168) = 0{,}0011$;
$\lambda(t_7) = 2/(10\cdot166) = 0{,}0012$;
$\lambda(t_8) = 4/(10\cdot162) = 0{,}0024$;
$\lambda(t_9) = 5/(10\cdot157) = 0{,}0032$;
$\lambda(t_{10}) = 8/(10\cdot149) = 0{,}0053$.

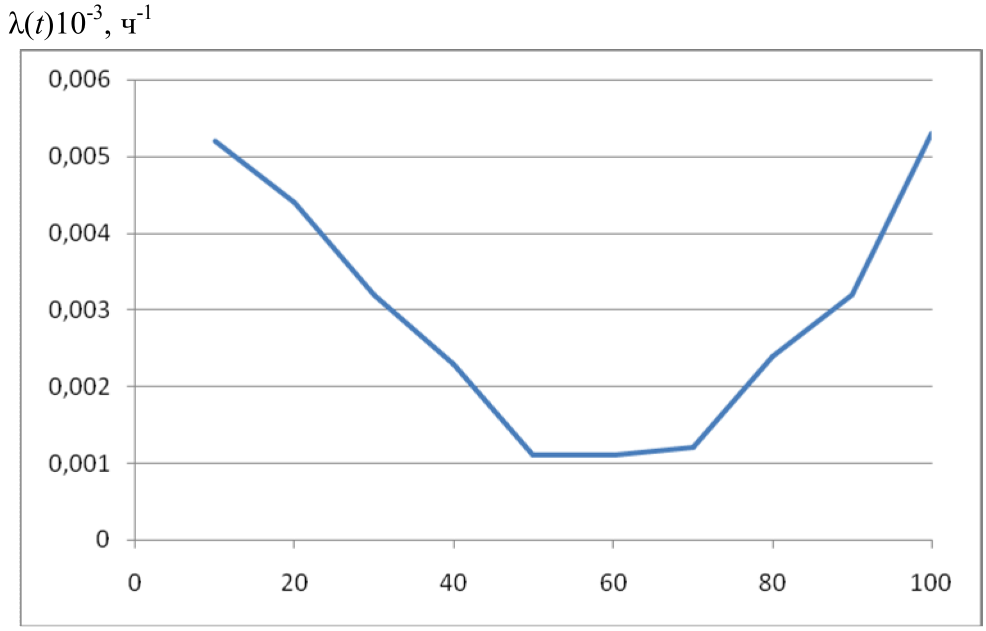


Рисунок к примеру 5.2. Кривая интенсивности отказов во времени

*

Схематически работу оборудования, когда количество отказов фиксируется к моменту времени t и по истечению некоторого промежутка Δt, можно представить следующей схемой (рис. 5.5):

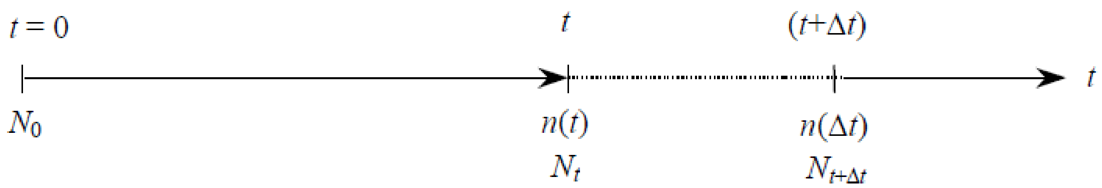


Рисунок 5.5 – Схема работы оборудования

На рис. 5.5: N_0 – число единиц одинакового оборудования, работающего в одинаковых условиях; $n(t)$ – число отказов в контрольной группе к моменту времени t; N_t – число единиц исправного оборудования к моменту времени t; $n(\Delta t)$ – число отказов за промежуток времени Δt; $N_{t+\Delta t}$ – число единиц исправного оборудования к моменту времени $(t + \Delta t)$.

Вероятность безотказной работы за время t

$$P(t) = \frac{N_0 - n(t)}{N_0}.$$

Вероятность безотказной работы за время Δt

$$P(\Delta t) = \frac{N_0 - n(\Delta t)}{N_0}.$$

Вероятность безотказной работы за время $\left(t+\frac{1}{2}\Delta t\right)$

$$P\left(t+\frac{1}{2}\Delta t\right)=\frac{N_0-n\left(t+\frac{1}{2}\Delta t\right)}{N_0},$$

где $n\left(t+\frac{1}{2}\Delta t\right)$ – среднее количество изделий, отказавших в период времени $(t+\Delta t)$

$$n\left(t+\frac{1}{2}\Delta t\right)=n(t)+\frac{1}{2}n(\Delta t).$$

Частота отказов, $с^{-1}$

$$f\left(t+\frac{1}{2}\Delta t\right)=\frac{n(\Delta t)}{N_0\Delta t}.$$

Интенсивность отказов, $с^{-1}$

$$\lambda\left(t+\frac{1}{2}\Delta t\right)=\frac{n(\Delta t)}{N_{ср}\left(t+\frac{1}{2}\Delta t\right)\Delta t},$$

где $N_{ср}\left(t+\frac{1}{2}\Delta t\right)$ – среднее количество работающих изделий за период времени $(t+\Delta t)$

$$N_{ср}\left(t+\frac{1}{2}\Delta t\right)=N_0-\left(n(t)+\frac{1}{2}n(\Delta t)\right).$$

*

Пример 5.3. На испытания поставлено N_0 = 150 однотипных подшипниковых узлов перемешивающих устройств. За первое время t = 2500 ч отказало $n(t)$ = 32 шт. За время Δt = 150 ч отказало $n(\Delta t)$ = 10 шт. Определить вероятность безотказной работы за время t, $(t+\Delta t)$ и $\left(t+\frac{1}{2}\Delta t\right)$, а также частоту и интенсивность отказов узлов в промежутке времени от t до $(t+\Delta t)$ часов.

Решение.

Вероятность безотказной работы за время t

$$P(t)=\frac{N_0-n(t)}{N_0}=\frac{150-32}{150}=0{,}787.$$

Вероятность безотказной работы за время Δt

$$P(\Delta t)=\frac{N_0-n(\Delta t)}{N_0}=\frac{150-10}{150}=0{,}933.$$

Вероятность безотказной работы за время $\left(t+\frac{1}{2}\Delta t\right)$

$$P\left(t+\frac{1}{2}\Delta t\right)=\frac{N_0-n\left(t+\frac{1}{2}\Delta t\right)}{N_0}$$

Среднее количество изделий, отказавших в период времени (t + Δt)

$$n\left(t+\frac{1}{2}\Delta t\right)=n(t)+\frac{1}{2}n(\Delta t).$$

$$n\left(t+\frac{1}{2}\Delta t\right)= 32 + ½\ 10 = 37$$

$$P\left(t+\frac{1}{2}\Delta t\right)=\frac{150-37}{150}=0{,}753.$$

Частота отказов, с$^{-1}$

$$f(t)=\frac{n(t)}{N_0\Delta t}=32/(150\ 150) = 0{,}0014$$

$$f\left(t+\frac{1}{2}\Delta t\right)=\frac{10}{150\cdot 150}=0{,}0004$$

Интенсивность отказов, с$^{-1}$

$$\lambda(t)=\frac{n(\Delta t)}{N_{cp}(t)\Delta t},$$

$$N_{cp}\left(t+\frac{1}{2}\Delta t\right)=N_0-\left(n(t)+\frac{1}{2}n(\Delta t)\right)= 150 - (32 + ½\ 10) = 133.$$

$$\lambda(t)=\frac{10}{133\cdot 150}=0{,}0005.$$

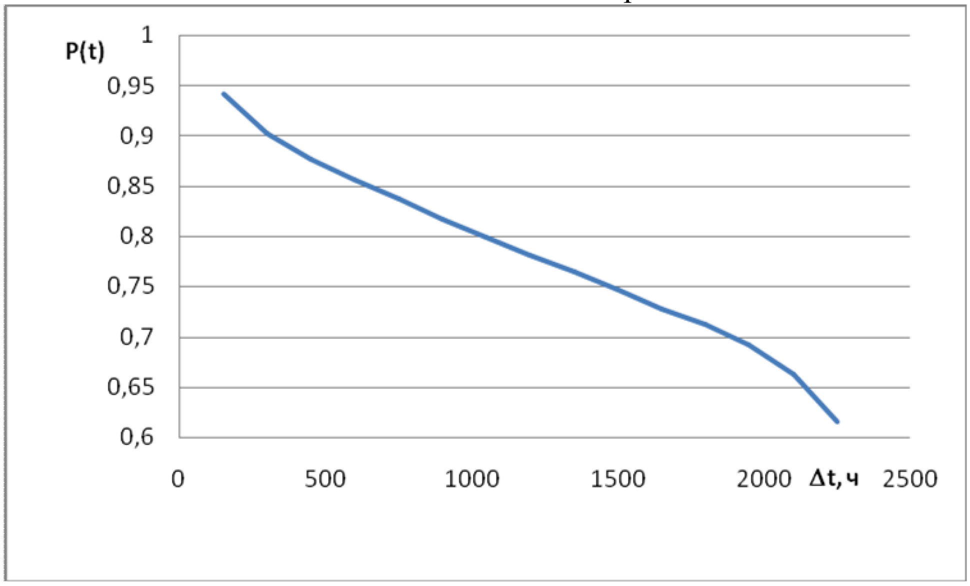
Пример 5.4. На испытаниях находилось N_0 = 1500 образцов неремонтируемой аппаратуры. Число отказов $n(\Delta t)$ фиксировалось через каждые Δt = 150 ч работы. Определить характеристики надежности и построить зависимость характеристик от времени: $P(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$.

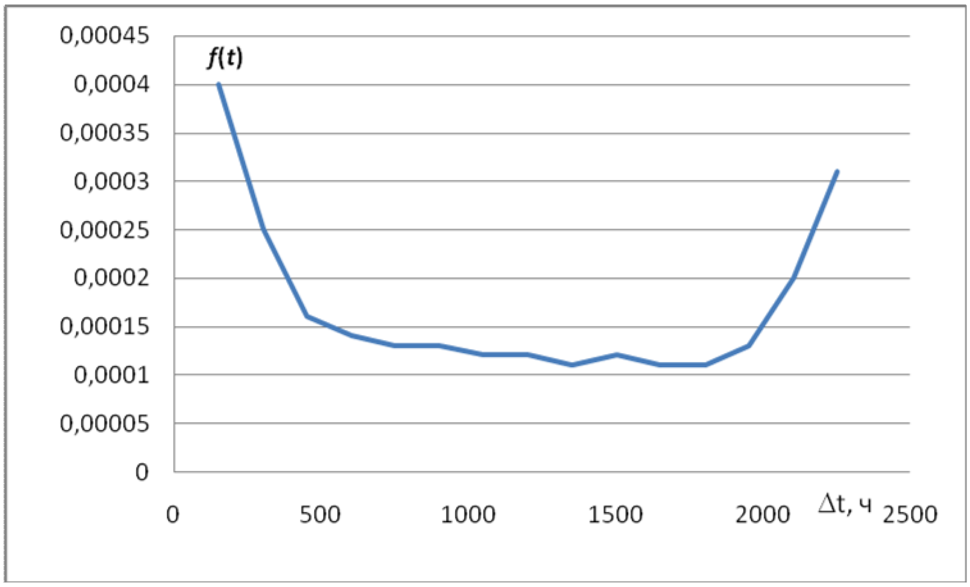
Решение. Сведем результаты расчетов $P(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$ в таблицу:

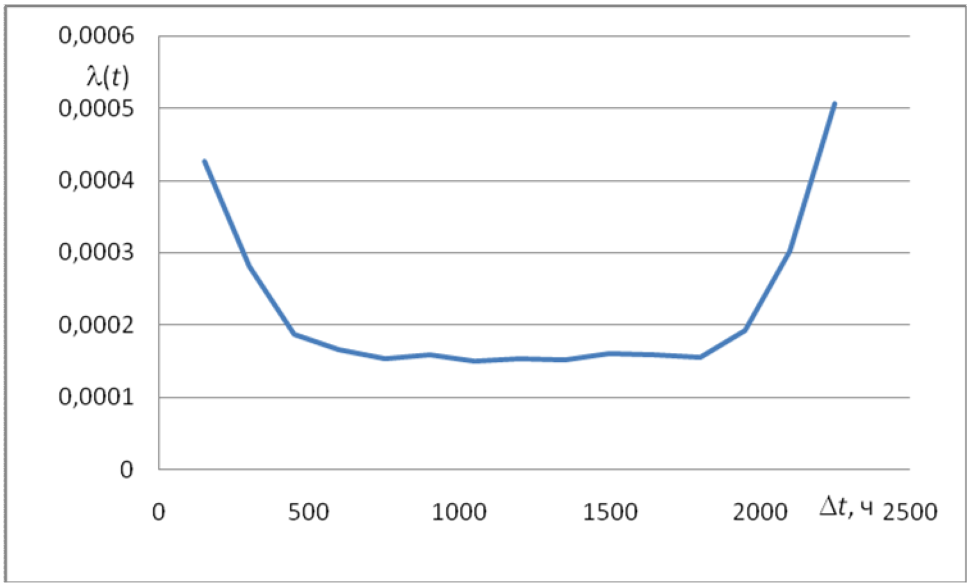
	Δt_i, ч	$n(\Delta t)_i$	$P(t)_i$	$f(t)_i$, 1/ч	$\lambda(t)_i$, 1/ч
1	150	90	0,941	0,0004	0,000426
2	150	57	0,902	0,00025	0,000281
3	150	37	0,877	0,00016	0,000187
4	150	32	0,856	0,00014	0,000166
5	150	29	0,837	0,00013	0,000154
6	150	29	0,817	0,00013	0,000158
7	150	27	0,799	0,00012	0,00015
8	150	27	0,781	0,00012	0,000154
9	150	26	0,764	0,00011	0,000151
10	150	27	0,746	0,00012	0,000161
11	150	26	0,728	0,00011	0,000159
12	150	25	0,712	0,00011	0,000156
13	150	30	0,692	0,00013	0,000193
14	150	45	0,662	0,0002	0,000302
15	150	70	0,615	0,00031	0,000506

Построим графики:

1. Изменения значения ВБР от времени.
2. Изменения значения частоты отказов на интервалах времени.
3. Изменения значения интенсивности отказов от времени.







Наглядное представление о законах распределения дают статистические графики, наиболее распространенными из которых являются: **полигон, гистограмма, статистическая функция распределения.**

Тип функции распределения при анализе экспериментальных данных обычно устанавливают по внешнему виду **гистограммы**, построенной на небольших интервалах изменения случайной величины, или по аппроксимирующей кривой

Гистограмма *позволяет оценить состояние качества*. Гистограмма представляет собой столбчатый график, построенный по полученным за определенный период (час, неделю, месяц) данным, которые разбиваются на несколько интервалов. Число данных, попавших в каждый из интервалов (частота), выражается высотой столбика.

Высота каждого столбца указывает на частоту появления значений параметров в выбранном диапазоне, а количество столбцов – на число выбранных диапазонов.

Важное преимущество гистограммы заключается в том, что она позволяет наглядно представить тенденции изменения измеряемых параметров качества объекта и зрительно оценить закон их распределения. Кроме того, гистограмма дает возможность быстро определить центр, разброс и форму распределения случайной величины. Строится гистограмма, как правило, для интервального изменения значений измеряемого параметра.

Порядок построения гистограммы следующий:

1. Собираются статистические данные – результаты измерений параметра объекта. Для того, чтобы гистограмма позволяла оценить вид распределения случайной величины предпочтительно иметь не менее тридцати результатов измерений.
2. Выявляется наибольшее и наименьшее значение показателя среди полученных результатов измерений.
3. Определяется ширина диапазона значений показателя – из наибольшего значения показателя вычитается наименьшее значение.
4. Выбирается надлежащее число интервалов, в пределах которых необходимо сгруппировать результаты измерений.
5. Устанавливаются границы интервалов. Границы интервалов необходимо установить так, чтобы значения данных не попадали ни на одну из границ интервала. Например, если были выбраны интервалы с границами от 0,5 до 5,5 от 5,5 до 10,5 и т.д. то значение данных 5,5 будет попадать как в первый, так и во второй интервал. Чтобы избежать этой проблемы можно изменить интервалы от 0,51 до 5,50 от 5,51 до 10,50 и так далее, таким образом ни одно значение данных не попадет на границу интервала.
6. Подсчитывается число попаданий значений результатов измерений в каждый из интервалов.
7. Строится гистограмма – на оси абсцисс (горизонтальной оси) отмечаются интервалы, а на оси ординат (вертикальной оси) отмечается частота попаданий результатов измерений в каждый интервал. Интервалы можно устанавливать в натуральных единицах (если позволяет масштаб), т.е. в тех единицах, в которых проводились измерения, либо каждому интервалу можно присвоить порядковый номер и отмечать на оси абсцисс номера интервалов. В результате получается столбчатая диаграмма:

Рисунок 5.6 – Пример гистограммы

Если на контролируемый параметр существует поле допуска, то гистограмма может содержать верхнюю и нижнюю границы поля допуска. Это позволяет увидеть в какую сторону и как смещается значение контролируемого показателя относительно поля допуска. Границы наносятся по оси абсцисс.

Гистограмма, представленная на рис. 5.6 имеет форму нормального распределения, что говорит о стабильности процесса. Часто бывает, что форма распределения отклоняется от нормального. Это свидетельствует о нарушениях в процессе и необходимости применения управляющих воздействий.

Преимуществом гистограммы является ее наглядность, простота, возможность быстро представить вид распределения большого числа данных. Также гистограмма показывает взаимосвязь изменения контролируемых параметров по отношению к инженерным спецификациям. К недостаткам можно отнести – отсутствие возможности количественно оценить стабильность процесса, отсутствие привязки ко времени, необходимость большого числа данных для точной оценки структуры распределения, возможность различного толкования результатов, некоторая субъективность в представлении формы распределения.

Вопросы для самоконтроля.

1. Дайте определение вероятности безотказной работы и вероятности отказа. Как они определяются? Вид их графического представления.
2. Дайте определение функции распределения и плотности распределения. Какая взаимосвязь между этими величинами и вероятностью безотказной работы?
3. Представьте вид функции распределения для дискретной и непрерывной случайной величины.
4. Дайте определение интенсивности отказов и нахождение ее значений. Приведите примеры. Объясните вид и характер функции интенсивности отказов.
5. Что такое гистограмма и для чего ее используют? Какой порядок построения гистограммы?

6 ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Выбор закона распределения состоит в подборе аналитической функции наилучшим образом аппроксимирующей эмпирические функции надежности.

Выбор, в значительной мере, процедура неопределенная и во многом субъективная, при этом многое зависит от априорных знаний об объекте и его свойствах, условиях работы, а также анализа вида графиков $P(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$.

Задача о выборе закона распределения наиболее актуальна на этапе проектирования.

6.1 Нормальный закон распределения

Нормальный закон распределения часто называют законом Гаусса. Этот закон играет важную роль и наиболее часто используется на практике по сравнению с другими законами распределения.

Основная особенность этого закона состоит в том, что он является ***предельным*** *законом,* к которому приближаются другие законы распределения.

В теории надежности его используют для описания постепенных отказов, когда распределение времени безотказной работы в начале имеет низкую плотность, затем максимальную и далее плотность снижается.

Распределение всегда подчиняется нормальному закону, если на изменение случайной величины оказывают влияние многие, примерно равнозначные факторы.

Нормальный закон распределения описывается плотностью вероятности:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma[X]\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-M[X])^2}{2(\sigma[X])^2}}, \tag{6.1}$$

Колоколообразная кривая плотности вероятности распределения приведена на рис. 6.1.

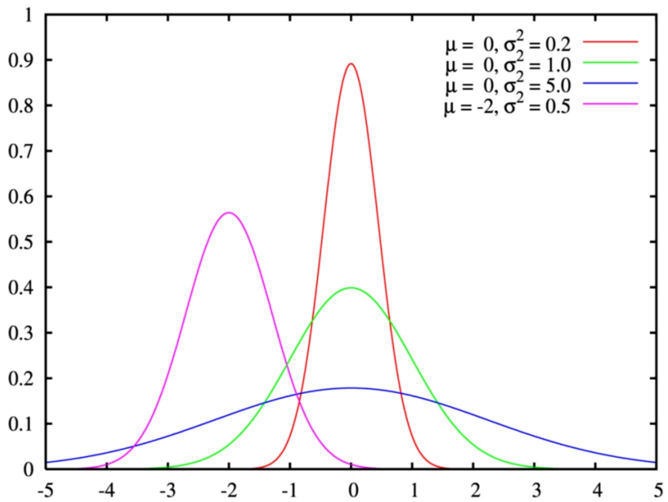


Рисунок 6.1 – Кривые плотности нормального распределения

Параметр $\mu = M$[X] представляет собой математическое ожидание (среднее значение) случайной величины X, определяемое, а параметр σ – среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Математическое ожидание

$$M[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \; ; \qquad (6.2)$$

среднее квадратическое отклонение случайной величины X:

$$\sigma[X] = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - M[X]\right)^2} \; . \qquad (6.3)$$

Интегральная функция распределения имеет вид (рис. 6.2)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sigma[X]\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{(x-M[X])^2}{2(\sigma[X])^2}}dx \; ; \qquad (6.4)$$

вероятность отказа и вероятность безотказной работы соответственно $Q(x) = F(x)$, $P(x) = 1 - F(x)$.

Вычисление интегралов заменяют использованием таблиц нормального распределения, при котором $M[X] = 0$ и $\sigma[X] = 1$. Для этого распределения функция плотности вероятности имеет одну переменную t и выражается зависимостью

$$f_0(t) = \frac{1}{2\pi}e^{\frac{t^2}{2}} \; . \qquad (6.5)$$

Величина t является центрированной (так как $M_t = 0$) и нормированной (так как $\sigma_t = 1$). Функция распределения соответственно запишется в виде:

$$F_0(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \; . \qquad (6.6)$$

Из этого уравнения следует, что $F_0(t) + F_0(-t) = 1$ или $F_0(-t) = 1 - F_0(t)$.

При использовании таблиц (Приложение 1) следует в формулу (6.5) вместо t подставить ее значение:

$$t = (x - M[X]) / \sigma[X];$$

при этом t называют *квантилью нормированного нормального распределения* (обычно обозначают u_p).

Плотность распределения и вероятность отказа соответственно равны:

$$f(x) = f_0(t)/\sigma; \qquad Q(x) = F_0(t);$$

тогда вероятность безотказной работы $P(x) = 1 - F_0(t)$, где $f_0(t)$ и $F_0(t)$ определяют по таблицам.

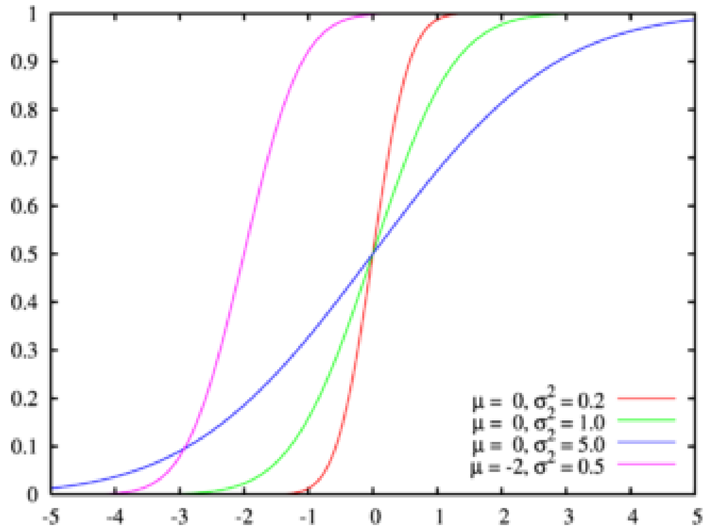


Рисунок 6.2 – Вид функции нормального распределения

В работах по надежности часто вместо интегральной функции распределения $F_0(t)$ используют функцию Лапласса:

$$\Phi^*(x)=\int_0^t f_0(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}dt \ . \qquad (6.7)$$

Очевидно, что

$$F_0(t)=\int_{-\infty}^{0} f_0(t)dt+\int_0^t f_0(t)dt=0{,}5+\Phi^*(t). \qquad (6.8)$$

Вероятности отказа и безотказной работы, выраженные через функцию Лапласса:

$$Q(x)=0{,}5+\Phi^*\left(\frac{x-M[X]}{\sigma[X]}\right), \qquad P(x)=0{,}5-\Phi^*\left(\frac{x-M[X]}{\sigma[X]}\right). \qquad (6.9)$$

Вероятность попадания случайной величины X в заданный интервал значений от α до β вычисляют по формуле

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi^*\left(\frac{\beta-M[X]}{\sigma[X]}\right)-\Phi^*\left(\frac{\alpha-M[X]}{\sigma[X]}\right) \qquad (6.10)$$

С помощью выражения (6.10) и таблицы $\Phi^*(x)$ можно определить вероятность попаданния случайной величины в интервал значений от α до β.

Нормальному закону подчиняются и случайные ошибки, возникающие при различного рода измерениях. Например, если получено значение $P(\alpha<X<\beta)=0{,}68$, то этот результат свидетельствует о том, что 68 % ошибок не превышают величины среднеквадратической ошибки.

Пример 6.1. Определить вероятность безотказной работы в течение t = 2 10^4 ч подшипника скольжения, если ресурс по износу подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $M_t = 4 \cdot 10^4$ ч, $\sigma = 10^4$ ч.

Решение. Находим квантиль

$$u_p = (t - M_t)/\sigma$$
$$u_p = (2 \cdot 10^4 - 4 \cdot 10^4) / 10^4 = -2.$$

Для отрицательных значений t значение функции можно вычислить по формуле

$$\Phi^*(u_p) = 1 - \Phi^*(-u_p).$$
$$\Phi^*(-2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228.$$

Пример 6.2. Пусть случайная величина X представляет собой предел текучести стали. Опытные данные показывают, что предел текучести имеет нормальное распределение с параметрами $M = 650$ МПа, $\sigma = 30$ МПа. Определить значение вероятность того, что полученная плавка стали имеет предел текучести в интервале 600 ÷ 670 МПа.

Решение. Для определения вероятности воспользуемся формулой (6.8)

$$P\,(600 < X < 670) = \Phi^*(670 - 650)/30 - \Phi^*(600 - 650)/30 = 0{,}7454 - (1{,}0 - 0{,}9515) = 0{,}697.$$

Пример 6.3. Случайная величина X распределена по нормальному закону и представляет собой ошибку измерения датчика давления. При измерении датчик имеет систематическую ошибку в сторону завышения на 0,5 МПа, среднее квадратическое отклонение ошибки измерения составляет 0,2 МПа. Найти вероятность того, что отклонение измеряемого значения от истинного не превзойдет по абсолютной величине 0,7 МПа.

Решение. По формуле (3.17) с использованием таблиц определим

$$P\,(0{,}2 < X < 0{,}7) = \Phi^*(0{,}7 - 0{,}5)/0{,}2 - \Phi^*(0{,}2 - 0{,}5)/0{,}2 = 0{,}77.$$

*

6.2 Экспоненциальное распределение

Экспоненциальный закон распределения, называемый также **основным законом надежности**, часто используют для прогнозирования надежности в период нормальной эксплуатации изделий, когда *постепенные отказы* еще не проявились и надежность характеризуется ***внезапными отказами.***

Эти отказы вызываются неблагоприятным стечением многих обстоятельств и поэтому имеют **постоянную** ***интенсивность***.

Экспоненциальное распределение находит довольно широкое применение в теории массового обслуживания, описывает распределение наработки на отказ сложных изделий, время безотказной работы элементов радиоэлектронной аппаратуры.

Плотность распределения экспоненциального закона (рис. 6.3) описывается соотношением

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\,; \qquad (6.11)$$

функция распределения этого закона – соотношением

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}\,; \qquad (6.12)$$

функция ВБР

$$P(x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}; \qquad (6.13)$$

математическое ожидание случайной величины X

$$M[X] = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}; \qquad (6.14)$$

дисперсия случайной величины X

$$D[X] = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}. \qquad (6.15)$$

Экспоненциальный закон в теории надежности нашел широкое применение, так как он прост для практического использования. Почти все задачи, решаемые в теории надежности, при использовании экспоненциального закона оказываются намного проще, чем при использовании других законов распределения.

Основная причина такого упрощения состоит в том, что при экспоненциальном законе вероятность безотказной работы зависит только от длительности интервала и не зависит от времени предшествующей работы.

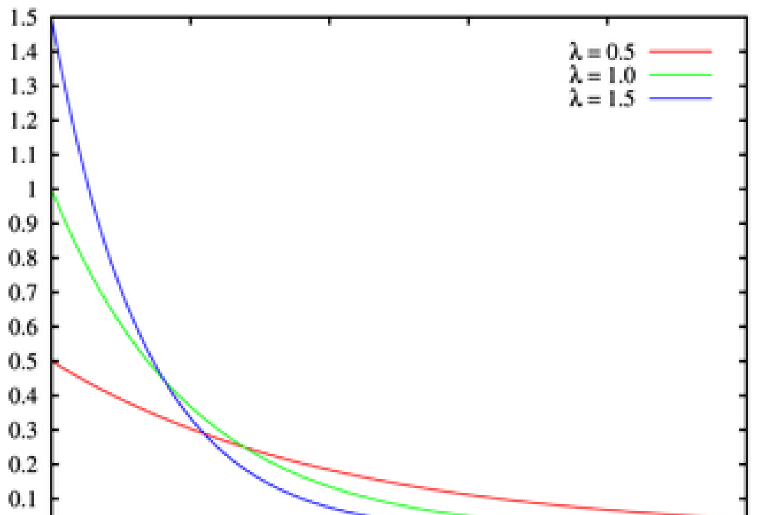


Рисунок 6.3 – Графики плотности экспоненциального распределения

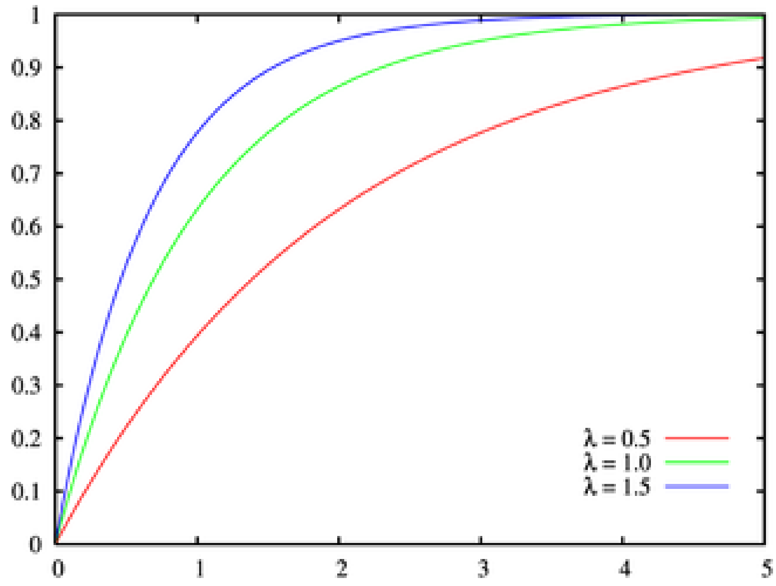


Рисунок 6.4 – Вид функции экспоненциального распределения

*

Пример 6.4. По данным эксплуатации генератора установлено, что наработка на отказ подчиняется экспоненциальному закону с параметром $\lambda = 2{\cdot}10^{-5}$ ч$^{-1}$.

Найти вероятность безотказной работы за время $t = 100$ ч.

Решение. Для определения вероятности безотказной работы воспользуемся формулой (6.10), в соответствии с которой

$$P(t) = e^{-\lambda t} = e^{-2\cdot 10^{-5}\cdot 100} = 0{,}998.$$

Математическое ожидание наработки на отказ равно

$$M[X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2\cdot 10^{-5}} = 5\cdot 10^{4} \text{ ч}.$$

Пример 6.5. Определить вероятность отсутствия внезапных отказов технологического оборудования в течение времени t, ч, соответственно периоду нормальной эксплуатации, если интенсивность токазов составляет λ, ч$^{-1}$.

Исходные данные:

№	t, ч	λ, ч$^{-1}$	№	t, ч	λ, ч$^{-1}$
1	10 000	$1{,}00{\cdot}10^{-6}$	11	18 700	$6{,}23{\cdot}10^{-6}$
2	10 500	$1{,}92{\cdot}10^{-6}$	12	10 600	$1{,}27{\cdot}10^{-6}$
3	10 540	$2{,}88{\cdot}10^{-6}$	13	17 800	$7{,}82{\cdot}10^{-6}$
4	11 000	$3{,}71{\cdot}10^{-6}$	14	17 890	$1{,}11{\cdot}10^{-6}$
5	10 060	$5{,}09{\cdot}10^{-6}$	15	10 800	$1{,}95{\cdot}10^{-6}$
6	14 000	$4{,}41{\cdot}10^{-6}$	16	10 040	$2{,}29{\cdot}10^{-6}$
7	12 400	$5{,}85{\cdot}10^{-6}$	17	13 200	$1{,}44{\cdot}10^{-6}$
8	17 800	$4{,}68{\cdot}10^{-6}$	18	18 070	$1{,}37{\cdot}10^{-6}$
9	18 700	$6{,}93{\cdot}10^{-6}$	19	19 990	$1{,}51{\cdot}10^{-6}$
10	14 200	$7{,}41{\cdot}10^{-6}$	20	19 020	$1{,}00{\cdot}10^{-6}$

*

6.3 Закон распределения Пуассона

Распределение Пуассона играет особую роль в теории надежности, поскольку оно описывает закономерность появления ***случайных отказов*** в сложных системах.

Этот закон нашел широкое применение при определении вероятности появления и восстановления отказов.

Случайная величина X распределена по *закону Пуассона,* если вероятность того, что эта величина примет определенное значение m, выражается формулой

$$P_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \quad , \tag{6.16}$$

где λ – параметр распределения (некоторая положительная величина); $m = 0, 1, 2, ...$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X для закона Пуассона равны параметру распределения λ:

$$M[X] = D[X] = \lambda. \tag{6.17}$$

Это свойство распределения Пуассона часто применяется на практике для решения вопроса, правдоподобна ли гипотеза о том, что случайная величина X распределена по закону Пуассона. Для этого определяют из опыта статистические характеристики – математическое ожидание и дисперсию – случайной величины. Если их значения близки, то это может служить доводом в пользу гипотезы о пуассоновском распределении; резкое различие этих характеристик, напротив, свидетельствует против гипотезы.

Распределение Пуассона является *однопараметрическим* с параметром λ.

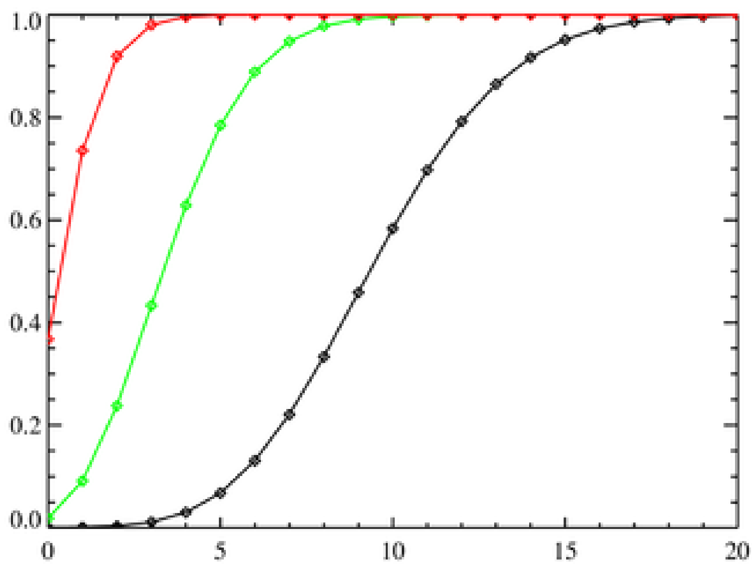


Рисунок 6.5 – Графики плотности распределения Пуассона

*

Пример 6.6. В ремонтную мастерскую по обслуживанию телевизоров поступают заявки со средней плотностью 5 шт. в течение рабочей смены за 10 ч. Считая, что число заявок на любом отрезке времени распределено по закону Пуассона, найти вероятность того, что за 2 ч рабочей смены поступят две заявки.

Решение. Среднее число заявок за 2 ч равно $\lambda = 2\cdot 5/10 = 1$.

Применяя формулу (6.16), найдем вероятность поступления двух заявок

$$P_m = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} = \frac{1^2}{2!}e^{-1} = 0{,}184\,.$$

Пример 6.7. Станок штампует детали. Вероятность того, что деталь окажется бракованной, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется ровно 4 бракованных.

Решение. При принятом законе распределения Пуассона (для случая малых значений р и большом значении n) математическое ожидание равно интенсивности.

Тогда $\lambda = p\,n = 0{,}01\cdot 200 = 2.$

$$P_m = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} = 2^4\cdot e^{-2}/4! = 0{,}09$$

Пример 6.8. На склад поступило 1000 бутылок растворителя. Вероятность того, что при погрузке одна бутылка окажется разбитой, равна 0,005. Найти вероятность того, что при погрузке количество разбитых бутылок составит:

А) ровно две;

Б) менее двух;

В) более двух;

Г) хотя бы одну.

Решение:

Находим интенсивность отказов: $\lambda = p\,n = 0{,}005\cdot 1000 = 5$.

А) вероятность того, что будет разбито две бутылки:

$$P\,(2) = 5^2\cdot e^{-5}/2! = 0{,}0842.$$

Б) вероятность того, что будет разбито менее двух бутылок (ни одной или одна) поскольку выражается суммой вероятностей, составит:

$$P = P\,(0) + P(1) = 5^0\cdot e^{-5}/0! + 5^1\cdot e^{-5}/1! = 6\,e^{-5} = 0{,}0404.$$

В) вероятность того, что будет разбито более двух бутылок, определяется в предпложении, что события «разбито более двух бутылок» и «разбито не более двух бутылок» противоположны.

Тогда вероятность последнего события равна:

$$P = 5^0\cdot e^{-5}/0! + 5^1\cdot e^{-5}/1! + 5^2\cdot e^{-5}/2! = 0{,}0842 + 0{,}0404 = 0{,}1246.$$

А вероятность противоположного:

$$\overline{P} = 1 - P = 1 - 0{,}1246 = 0{,}8753.$$

Г) по аналогии с предыдущим примером событие «разбита хотя бы одна бутылка» и «ни одна бутылка не разбита» противоположны. Тогда вероятность того, что будет разбито хотя бы одну бутылку равна

$$\overline{P} = 1 - P\,(0) = 1 - 5^0\cdot e^{-5}/0! = 1 - 0{,}0067 = 0{,}9932.$$

6.4 Логарифмически нормальное распределение

Логарифмически нормальное распределение применяют дня описания наработки ***до отказа*** подшипников, электронных ламп и других изделий. К таким изделиям относятся те, у которых отказ наступает вследствие усталостного разрушения.

Это значит, что значения логарифмически нормальной случайной величины формируются под воздействием очень большого числа взаимно независимых факторов, причем воздействие каждого отдельного фактора «равномерно незначительно» и равновероятно по знаку.

Неотрицательная случайная величина распределена *логарифмически нормально,* если ее логарифм распределен нормально. Плотность распределения для различных значений σ приведена на рис. 6.6.

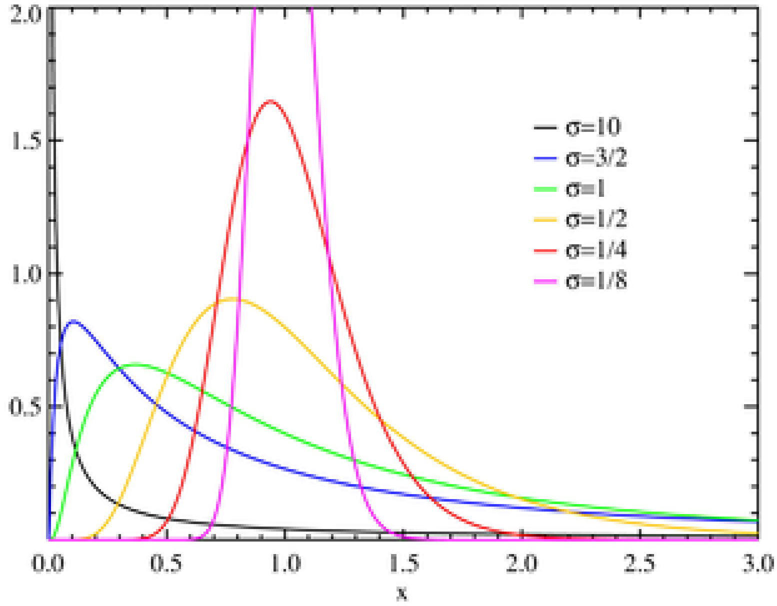


Рисунок 6.6 – Плотность логарифмически нормального распределения

Плотность распределения описывается зависимостью

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(\ln x - M)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (6.16)$$

где M и σ — параметры, оцениваемые по результатам n испытаний до отказа;

$$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i; \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i - M)^2}. \qquad (6.17)$$

Для логарифмически нормального закона распределения функция надежности выглядит так:

$$P(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\ln(x/M)}{\sigma}}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\,. \tag{6.18}$$

Вероятность безотказной работы можно определить по таблицам для нормального распределения в зависимости от значения квантили

$$u_p = (\ln x - M)/\sigma.$$

Математическое ожидание наработки до отказа

$$M[X]=e^{\left(M+\sigma^2/2\right)}\,. \tag{6.19}$$

Среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации соответственно равны:

$$\sigma=\sqrt{e^{2M+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)}\,; \tag{6.20}$$

$$\nu_x=\frac{\sigma_x}{M[X]}=\sqrt{e^{\sigma^2}-1}\,. \tag{6.21}$$

При $\nu_x \le 0{,}3$ полагают, что $\nu_x = \sigma_x$, при этом ошибка не более 1%.

Часто применяют запись зависимостей для логарифмически нормального **закона в десятичных логарифмах**. В соответствии с этим законом плотность распределения

$$f(x)=\frac{0{,}4343}{\sigma x\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(\lg x-\lg x_0)^2}{2\sigma^2}}\,. \tag{6.22}$$

Оценки параметров $\lg x_0$ и σ определяют по результатам испытаний:

$$\lg x_0=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lg x_i\,, \qquad \sigma=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\lg x_i-\lg x_0\right)^2}\,. \tag{6.23}$$

Математическое ожидание $M[X]$, среднее квадратическое отклонение σ_x и коэффициент вариации ν_x наработки до отказа соответственно равны:

$$M[X]=x_0 e^{2{,}65\sigma^2}\,; \tag{6.24}$$

$$\sigma_x=M[X]\sqrt{\left(\frac{M[X]}{x_0}\right)^2-1}\,; \tag{6.25}$$

$$\nu_x=\sqrt{\left(\frac{M[X]}{x_0}\right)^2-1}\,. \tag{6.26}$$

*

Пример 6.7. Определить вероятность безотказной работы редуктора в течение $t = 10^3$ ч, если ресурс распределен логарифмически нормально с параметрами $\lg t_0 = 3{,}6$, $\sigma = 0{,}3$.

Решение. Найдем значение квантили и по ней определим вероятность безотказной работы:

$$u_p = (\lg t - \lg t_0)/\sigma.$$

$$u_p = (\lg 10^3 - 3{,}6)/0{,}3 = -2;$$

$$P(t) = \Phi_0(u_p) = \Phi_0(-2) = 0{,}0228.$$

6.5 Распределение Вейбулла

Закон Вейбулла-Гнеденко представляет собой *двухпараметрическое распределение.* Этот закон является **универсальным**, так как при соответствующих значениях параметров превращается в нормальное, экспоненциальное и другие виды распределений.

Они названы по фамилиям инженера В. Вейбулла, введшего эти распределения в практику анализа результатов усталостных испытаний, при описании наблюдавшихся при испытаниях разбросов усталостной прочности стали, пределов ее упругости. и математика Б.В.Гнеденко (1912 – 1995), получившего такие распределения в качестве предельных при изучении максимального из результатов испытаний.

Закон Вейбулла удовлетворительно описывает наработку до отказа подшипников, элементов радиоэлектронной аппаратуры, его используют для оценки надежности деталей и узлов машин, в частности автомобилей, а также для оценки надежности машин **в процессе их приработки.**

Плотность распределения описывается зависимостью

$$f(x) = \alpha\lambda x^{\alpha-1} \exp(-\lambda x^{\alpha}), \qquad (6.29)$$

где α — параметр формы кривой распределения; λ — параметр масштаба; е = 2,71828 — основание натурального логарифма.

График плотности распределения дан на рис. 6.7.

Функция распределения Вейбулла

$$F(x) = 1 - \exp(-\lambda x^{\alpha}). \qquad (6.30)$$

Функция надежности для этого закона:

$$P(x) = \exp(-\lambda x^{\alpha}). \qquad (6.31)$$

Математическое ожидание случайной величины X равно:

$$M_x = \Gamma(1 + 1/\alpha)\, \lambda^{-1/2}, \qquad (6.32)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Для непрерывных значений x

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \,. \qquad (6.33)$$

Для целочисленных значений x гамма-функцию вычисляют по формуле

$$\Gamma(x) = (x - 1)!; \qquad (6.34)$$

$$\Gamma(x - 1/2) = 1{\cdot}3{\cdot}5\ (2x - 3)\pi^{1/2}/2^x. \qquad (6.35)$$

$$\Gamma(x + 1/2) = 1{\cdot}3{\cdot}5\ (2x - 1)\ \pi^{1/2}/2^x. \qquad (6.36)$$

Дисперсия случайной величины равна:

$$D_x = \lambda^{-1/\alpha}\,[\Gamma(1 + 2/\alpha) - \Gamma^2(1 + 1/\alpha)]. \qquad (6.37)$$

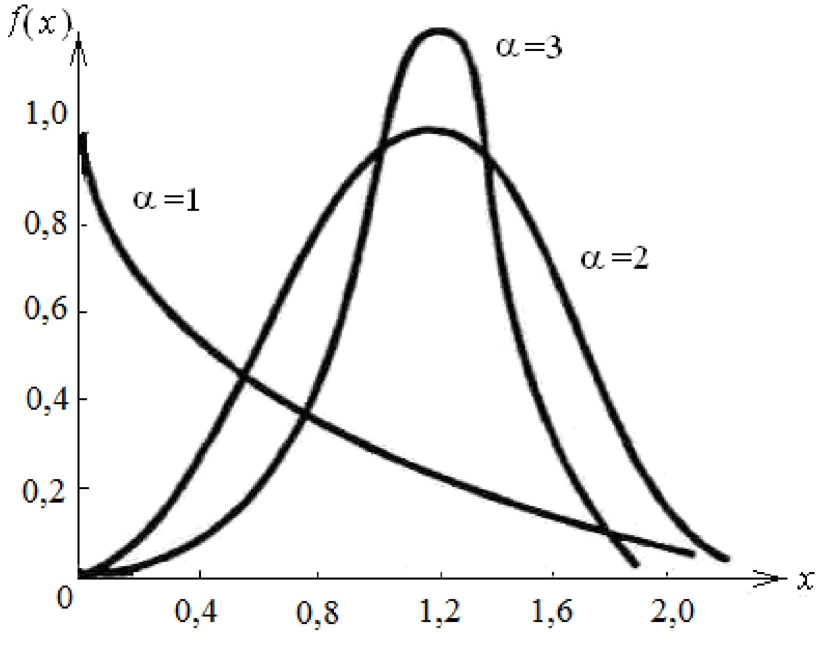


Рисунок 6.7 – Плотность распределения Вейбулла для λ = 1

Широкое применение закона распределения Вейбулла объясняется тем, что этот закон, обобщая экспоненциальное распределение, содержит дополнительный параметр α. Подбирая нужным образом параметры α и λ, можно получить лучшее соответствие расчетных значений опытным данным по сравнению с экспоненциальным законом, который является однопараметрическим (параметр λ).

Так, для изделий, у которых имеются скрытые дефекты, но которые длительное время не стареют, опасность отказа имеет наибольшее значение в начальный период, а потом быстро падает. Функция надежности для такого изделия хорошо описывается законом Вейбулла с параметром $\alpha < 1$.

Наоборот, если изделие хорошо контролируется при изготовлении и почти не имеет скрытых дефектов, но подвергается быстрому старению, то функция надежности описывается законом Вейбулла с параметром $\alpha > 1$. При $\alpha = 3{,}3$ распределение Вейбулла близко к нормальному.

6.6 Биномиальный закон распределения

В общей форме биномиальный закон распределения (распределения Бернулли) описывает осуществление признака в n испытаниях с возвратом: если производится n независимых испытаний, в каждом их которых случайное событие A может произойти или не произойти, причем вероятность события в каждом испытании постоянка и не равна ни нулю, ни одинице $P(A) = p = \text{const}$, то вероятность появления события в этих испытаниях ровно m раз вычисляется по формуле:

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad (6.38)$$

где $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ - число сочетаний из из n элементов по m,

$q = 1 - p$ – вероятность того, что событие A не появится в испытании.

Наглядной схемой таких испытаний является последовательный выбор с возвращением шаров из урны, содержащей m_1 белых и m_2 чёрных шаров. Если X – число появления белых шаров в выборке из $n \le m_1 + m_2$ шаров, то для определения $P(X)$ необходимо определить p, q – вероятность появления при одном извлечении соответственно белого и чёрного: $q = 1 - (m_1 / (m_1 + m))$.

Основные характеристики биномиального распределения (математическое ожидание и дисперсия):

$$M[X] = np; \qquad (6.39)$$

$$D[X] = npq. \qquad (6.40)$$

*

Пример 6.8. Вероятность получения бракованного изделия равна 0,01. Какова вероятность того, что среди 100 изделий окажется не более 3 бракованных?

Решение. Пусть $p = 0{,}01$; $q = 0{,}99$. Согласно биномиальному закону и закону сложения имеем

$$P = C_{100}^0 (0{,}01)^0 (0{,}99)^{100} + C_{100}^1 (0{,}01)^1 (0{,}99)^{99} + C_{100}^2 (0{,}01)^2 (0{,}99)^{98} +$$
$$+ C_{100}^3 (0{,}01)^3 (0{,}99)^{97} = 0{,}9816$$

Пример 6.9. Кость бросают 5 раз. Какова вероятность того, что 6 очков выпадет дважды?

Решение. $n = 5$, $m = 2$. При этих условиях $p = 1/6$; $q = 5/6$.

$$P_5^2 = C_5^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0{,}16.$$

Вопросы для самоконтроля.

1. Дайте характеристику закону распределения, описывающего постепенные отказы. Приведите характерный график функции распределения.
2. Дайте характеристику закону распределения, описывающего внезапные отказы. Приведите характерный график функции распределения.
3. Дайте характеристику закону распределения, описывающего случайные отказы. Приведите характерный график функции распределения.
4. Дайте характеристику закону распределения, описывающего наработку на отказ. Приведите характерный график функции распределения.
5. Дайте характеристику закону распределения, описывающего состояние элементов на этапе приработки. Приведите характерный график функции плотности распределения.

7 ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ НА ОСНОВЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

Вопрос о выборе закона распределения является одним из ключевых на конечной стадии расчета надежности и носит характер принятия той или иной гипотезы. От принятой гипотезы будет зависеть достоверность полученных результатов, эффективность сделанных выводов и рекомендаций.

К сожалению, фактические наблюдения показывают, что изменчивость законов распределений встречается довольно часто, причем для одних и тех же объектов. Относительно небольшое изменение объема статистических данных, условий или режимов эксплуатации или даже качества изготовления деталей может повлиять на нулевую гипотезу, т.е. изменить либо параметры закона распределения, либо даже его вид.

При оценке надежности выделяют три основные области статистических методов обработки результатов наблюдений – **описание данных**, **оценивание** (характеристик и параметров распределений, регрессионных зависимостей) и **проверка статистических гипотез**.

Описание данных – предварительный этап статистической обработки. Используемые при описании данных величины (статистические данные) являются результатом наблюдений, (измерений, опытов, испытаний) и применяются в дальнейшем для оценивания и проверки гипотез. Функции этих результатов называют «статистиками». Статистики, являющиеся выборочными аналогами характеристик случайных величин (математического ожидания, медианы, дисперсии, моментов и др.) и используемые для оценивания этих характеристик, называют статистическими характеристиками.

Оценивание – это определение приближенного значения неизвестной характеристики или параметра распределения (генеральной совокупности), иной оцениваемой составляющей математической модели реального явления или процесса по результатам наблюдений. Иначе: необходимо по данным выборочного распределения оценить неизвестные параметры теоретического распределения.

Оценивание проводят с помощью оценок – статистик. Оценивание бывает двух видов – точечное и интервальное.

7.1 Точечные и интервальные оценки

7.1.1 Точечное оценивание – способ оценивания, заключающийся в том, что значение оценки принимается как неизвестное значение параметра распределения.

Точечной оценкой неизвестного параметра называют число (точку на числовой оси), которое приблизительно равно оцениваемому параметру и может заменить его с достаточной степенью точности в статистических расчетах.

Для того чтобы точечные статистические оценки обеспечивали «хорошие» приближения неизвестных параметров, они должны быть несмещенными, состоятельными и эффективными.

Несмещенной называют статистическую оценку Θ^*, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру Θ, то есть

$$M(\Theta^*) = \Theta. \qquad (7.1)$$

Оценки, для которых это соотношение неверно, называются ***смещенными***. При этом разность между математическим ожиданием оценки Θ^* и оцениваемым параметром Θ, т.е. $M(\Theta^*) - \Theta$, называется смещением оценки.

Пусть Θ^* есть статистическая оценка неизвестного параметра Θ теоретического распределения. Допустим, что по выборке объема n найдена оценка Θ^*_1. Повторим опыт, т. е. извлечем из генеральной совокупности другую выборку того же объема и по ее данным найдем оценку Θ^*_2 и т. д. Получим числа Θ^*_1, Θ^*_2, …, Θ^*_k которые будут различаться. Таким образом, оценку Θ^* можно рассматривать как случайную величину, а числа $\Theta^*_1, \Theta^*_2, \ldots, \Theta^*_k$ как возможные ее значения.

Если оценка Θ^* дает приближенное значение Θ с избытком, то найденное по данным выборок число Θ ($k = 1, 2, \ldots, n$) будет больше истинного значения Θ. Следовательно, и математическое ожидание (среднее значение) случайной величины Θ^* будет превышать Θ, то есть $M(\Theta^*) > \Theta$. Если Θ^* дает приближенное значение Θ с недостатком, то $M(\Theta^*) < \Theta$.

Использование статистической оценки, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру, приводит к систематическим ошибкам.

Поэтому нужно потребовать, чтобы математическое ожидание оценки Θ было равно оцениваемому параметру.

Практически все оценки параметров, используемые в вероятностно-статистических методах, являются либо несмещенными, либо асимптотически несмещенными. Для несмещенных оценок показателем точности оценки служит дисперсия – **чем дисперсия меньше, тем оценка лучше**. Для смещенных оценок показателем точности служит математическое ожидание квадрата оценки $M(\Theta^* - \Theta)^2$.

Несмещенная оценка не всегда дает хорошее приближение оцениваемого параметра. Действительно, возможные значения Θ^* могут быть сильно рассеяны вокруг своего среднего значения, т. е. дисперсия величины Θ^* может быть значительной. В этом случае найденная по данным одной выборки оценка может оказаться удаленной от своего среднего значения, а значит, и от самого оцениваемого параметра, например, приняв Θ^*_1 в качестве приближенного значения Θ, мы допустили бы ошибку. Если потребовать, чтобы дисперсия величины Θ^* была малой, то возможность допустить ошибку будет исключена. Поэтому к статистической оценке предъявляются требования эффективности.

Эффективной называют статистическую оценку, которая (при заданном объеме выборки n) имеет наименьшую возможную дисперсию.

При рассмотрении выборок большого объема к статистическим оценкам предъявляется требование состоятельности.

Доказано, что среднеквадратическое $M[X]^*$ и несмещенная оценка дисперсии S^2 являются эффективными оценками параметров $M[X]$ и $D[X]$ нормального распределения.

Состоятельной называют статистическую оценку, которая при $n \to \infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру. Например, если дисперсия несмещенной оценки при $n \to \infty$ стремится к нулю, то такая оценка оказывается также состоятельной.

Оценка математического ожидания. Пусть имеется случайная величина X с математическим ожиданием $M[X]$ и дисперсией $D[X]$, при этом оба параметра неизвестны. Над величиной X произведено N независимых экспериментов, в результате которых была получена совокупность численных результатов $x_1, x_2, \ldots, x_N$.

В качестве оценки математического ожидания естественно предположить среднее арифметическое наблюдаемых значений:

$$M[X]^* = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \ . \tag{7.2}$$

Оценка математического ожидания является несмещенной.

Например, одним прибором (без систематических ошибок) сняли показания случайной величины, т.е. $x_1 = 13$, $x_2 = 15$, $x_3 = 17$. Простая несмещенная оценка математического ожидания составит $M[X]^* = (13 + 15 + 17)/3 = 15$. (т.е. это среднее значение наблюдаемой величины).

Оценка дисперсии. Дисперсия характеризует меру разброса около ее среднего значения (мера рассеивания, т.е. отклонения от среднего).

При больших объемах выборки для оценки дисперсии используют формулу выборочной дисперсии

$$D[X]^* = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - M[X]^*\right)^2}{N} \ . \tag{7.3}$$

Для случая предыдущего примера:

$$D[X]^* = ((13 - 15)^2 + (15 - 15)^2 + (17 - 15)^2)/3 = 8/3 = 2{,}67.$$

Это смещенная оценка генеральной дисперсии.

Для получения несмещенной оценки дисперсии генеральной совокупности, нужно умножить выборочную дисперсию на $\frac{N}{N-1}$. Тогда получиться величина, называемая исправленной выборочной дисперсией

$$S^2 = N\frac{D[X]^*}{N-1} \ . \tag{7.4}$$

Выражение для исправленной дисперсии является несмещенной оценкой генеральной дисперсии

А оценку среднего квадратического отклонения (стандарта) осуществляют по формуле:

$$S^* = \sqrt{S^2} \ . \tag{7.5}$$

$$S^2 = 3 \cdot 2{,}67/(3 - 1) = 4.$$

Точечные оценки параметров генеральной совокупности могут быть приняты в качестве ориентировочных, первоначальных результатов обработки выборочных данных.

7.1.2. Интервальные оценки. *Интервальное оценивание особенно необходимо при малом количестве наблюдений, когда точечная оценка малонадежна*.

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами –

концами отрезков. Оценивание с помощью ***доверительного интервала*** – это способ оценки, при котором с заданной ***доверительной вероятностью*** γ устанавливают границы доверительного интервала.

Задачу интервального оценивания в самом общем виде можно сформулировать так: по данным выборки построить числовой интервал, относительно которого с заранее выбранной вероятностью можно сказать, что этот интервал покроет (накроет) оцениваемый параметр.

Выбор значения доверительной вероятности не является математической задачей, а определяется конкретной решаемой проблемой.

Доверительным интервалом для параметра Θ называется такой интервал, относительно которого можно с заранее выбранной вероятностью

$$\gamma = 1 - \alpha \tag{7.6}$$

(близкой к единице), утверждать, что он содержит неизвестное значение параметра Θ; α – **уровень значимости**.

Пусть Θ^* – несмещенная оценка параметра Θ. Требуется оценить возможную при этом ошибку. По определенным правилам находят такое число $\delta > 0$, чтобы выполнялось соотношение:

$$P\,(|\Theta^* - \Theta| < \delta) = \gamma \qquad \text{или} \qquad P\,(\Theta_{min} < \Theta < \Theta_{max}) = \gamma. \tag{7.7}$$

Равенство означает, что интервал $[\Theta_{min}; \Theta_{max}]$, где $\Theta_{min} = \Theta^* - \delta$, а $\Theta_{max} = \Theta^* + \delta$, заключает в себе оцениваемый параметр с доверительной вероятностью γ .

Нижняя и верхняя граница доверительного интервала Θ_1 и Θ_2 определяются по результатам наблюдений, следовательно, сам доверительный интервал является случайной величиной. В связи с этим говорят, что доверительный интервал покрывает оцениваемый параметр с вероятностью γ.

Надежность принято выбирать равной 0,95; 0,99; 0,999 – тогда событие, состоящее в том, что интервал $[\Theta_{min}; \Theta_{max}]$, покрывает параметр Θ будет практически достоверным.

При этом число δ характеризует ***точность интервальной оценки***: чем меньше δ, тем оценка точнее и наоборот.

7.1.2.1. Интервальная оценка математического ожидания при известной дисперсии. Пусть случайная величина $X \in N\,(M[X]; D[X]\,)$ распределена по нормальному закону, причем математическое ожидание неизвестно, а дисперсия $D[X] = \sigma^2$ известна. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание. По наблюдениям найдем точечную оценку $M[X]^*$ математического ожидания. Зададимся вероятностью γ и найдем такое число δ, чтобы выполнялось соотношение:

$$P\Big(M\big[X\big]^* - \delta < \Theta^* < M\big[X\big]^* + \delta\Big) = \gamma\,. \tag{7.8}$$

Доказано, что построение доверительного интервала в этом случае осуществляется по формуле:

$$P\left(M[X]^* - t_y \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < M[X] < M[X]^* + t_y \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t_y) = \gamma, \tag{7.9}$$

где t_y – значение стандартной нормальной величины, соответствующее надежности $\Phi(t_y) = \gamma/2$, а $\Phi(t_y)$ – функция Лапласа; σ – среднее квадратическое отклонение.

Очевидно, что увеличение надежности γ приводит к увеличению функции $\Phi(t_y)$ и соответственно увеличению параметра t_y, что в свою очередь увеличивает величину δ. То есть *увеличение надежности оценки ведет к снижению ее точности* (увеличению погрешности).

При этом точность оценки математического ожидания равна:

$$\delta = t_y \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{7.10}$$

Очевидно, что с увеличением объема выборки n величина погрешности δ уменьшается, т.е. точность оценки повышается.

Формула (7.10) позволяет определить необходимый объем выборки для оценки математического ожидания с наперед заданной точностью и надежностью:

$$n_{\min} \geq \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}. \tag{7.11}$$

Смысл формулы (7.8) состоит в следующем: с надежностью γ доверительный интервал $\left(M[X]^* - t_y \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; M[X]^* + t_y \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ покрывает неизвестный параметр $M[X]^*$ генеральной совокупности. Можно сказать иначе: точечная оценка $M[X]^*$ определяет значение параметра X генеральной совокупности с точностью $\delta = t_y \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ и надежностью γ.

Каждому доверительному интервалу соответствует свое критическое значение. Например, для γ = 0,95 $t_y = \pm 1{,}96$, а для γ = 0,99 и α = 0,01 $t_y = \pm 2{,}58$.

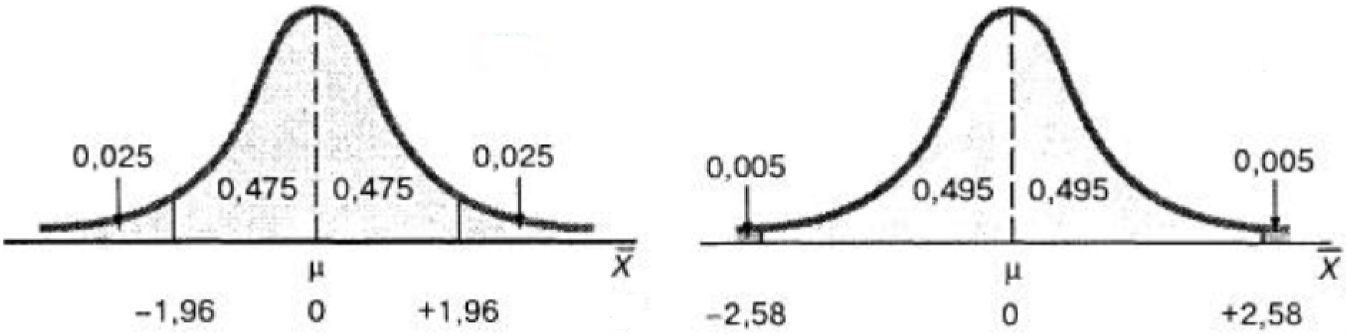


Рисунок 7.1 – Гауссова кривая для γ = 0,95 и γ = 0,99

*

Пример 7.1. Случайная величина имеет нормальное распределение. Найти доверительные интервалы для оценки с надежностью 0,96 неизвестного математического ожидания a, если объем выборки $n = 49$, генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma = 5$; выборочная средняя $M[X]^* = 30$.

Решение.

Поскольку $\gamma = 0,96$, то $\Phi(t_\gamma) = \gamma/2 = 0,48$. По табл. функции Лапласа (Приложение 2) находим для $\Phi(t_\gamma) = 0,48$ $t_\gamma = 2,06$.

Точность оценки математического ожидания:

$$\delta = t_y \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

$$\delta = 2,06 \frac{5}{\sqrt{49}} = 1,47.$$

$$28,53 < M[X]^* < 31,47.$$

Пример 7.2. Имеется генеральная совокупность с некоторой характеристикой, распределенной по нормальному закону. Дисперсия равна 6,25. Выборка имеет объем n = 27. Получено средневыборочное значение характеристики $\bar{x} = 27$. Найти доверительный интервал с надежностью $\gamma = 0,99$, покрывающий неизвестное математическое ожидание исследуемой характеристики.

Решение. Для $\Phi(t_\gamma) = 0,99/2 = 0,495$ $t_\gamma = 2,58$.

$$\delta = 2,58 \frac{\sqrt{6,25}}{\sqrt{27}} = 1,24,$$

Отсюда, доверительный интервал (10,76; 13,24).

Пример 7.3. Найти минимальный объем выборки n, при котором с надежностью 0,95 можно утверждать, что точность оценки математического ожидания $M[X]$, по выборочному среднему арифметическому равна $\delta = 0,2$, если известно, что среднее квадратическое отклонение $\sigma = 2,0$. Предполагается, что выборка величины нормально распределена.

Решение: По таблице находим, что при $\Phi(t) = 0,95/2 = 0,475$ $t = 1,96$.

$$n_{min} \geq \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2} = \frac{1,96^2 \cdot 2^2}{0,2^2} = 384,15.$$

Значит, объем выборки должен бать не менее 385.
*

7.1.2.2. Интервальная оценка математического ожидания при неизвестной дисперсии. На практике как математическое ожидание генеральной совокупности, так и его отклонение часто бывают неизвестными.

Ирландским статистиком Уильямом С. Госсетом было предложено t-распределение Стьюдента, позволившее разрешить проблему оценивания математического ожидания при неизвестной дисперсии.

Внешне график этого распределения очень напоминает стандартизованное нормальное распределение (представляет собой колокообразную форму и является симметричным).

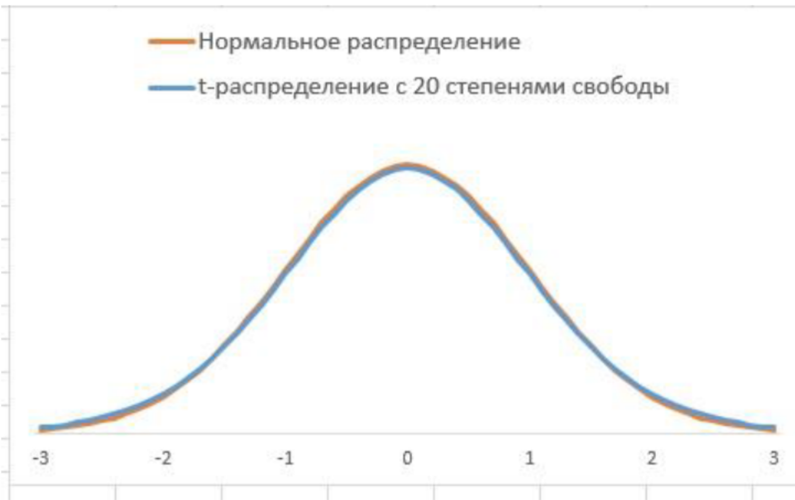


Рисунок 7.2 – Стандартизованное нормальное распределение и t-распределение Стьюдента с различным числом степеней свободы

В результате по наблюдениям находятся точечные оценки математического ожидания и дисперсии.

В этом случае построение доверительного интервала осуществляется по формуле:

$$P\left(M\left[X\right]^{*}-t_{\gamma t}\frac{S^2}{\sqrt{n-1}}<M\left[X\right]<M\left[X\right]^{*}+t_{\gamma t}\frac{S^2}{\sqrt{n-1}}\right)=\gamma \qquad (7.12)$$

где $t_{\gamma t}$ – значение функции распределения Стьюдента (t-распределения), соответствующее степеням свободы $k = n - 1$ и надежности γ.

При этом точность оценки математического ожидания равна: $\delta = t_{\gamma t}\frac{S^2}{\sqrt{n-1}}$.

Из уравнений видно, что распределение Стьюдента определяется числом степеней свободы и не зависит от неизвестных параметров математического ожидания и среднеквадратического отклонения.

*

Пример 7.4. Случайная величина X имеет нормальное распределение. По выборке объема $n = 61$ найдена выборочная средняя $M[X]^{*} = 30$ и исправленное среднее квадратичное значение $S^2 = 1{,}5$. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью $\gamma = 0{,}95$ неизвестного математического ожидания.

Решение:

Определим число степеней свободы $k = n - 1 = 61 - 1 = 60$.

Уровень значимости $\alpha = 1 - \gamma = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$.

По таблице распределения Стьюдента (Приложение 3) находим значение $t_{\gamma t} = 2{,}0$.

Тогда $$\delta = t_{\gamma\gamma}\frac{S^2}{\sqrt{n-1}} = 2{,}0\frac{1{,}5}{\sqrt{60}} = 0{,}387$$

Доверительный интервал для неизвестного математического ожидания с надежностью $\gamma = 0{,}95$ равен: $29{,}613 < \mu < 30{,}387$.

*

7.1.2.3. Доверительные интервалы для среднего квадратичного отклонения и дисперсии. При определении границ доверительных интервалов для дисперсии и среднего квадратического отклонения нормально распределенной случайной величины X используется статистика $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{D[X]}$, которая распределена по закону χ^2 с n – 1 степенями свободы.

По заданной надежности γ можно найти сколько угодно границ χ^2_1 и χ^2_2 интервалов, таких, что

$$P(\chi^2_1 < \chi^2 < \chi^2_2) = \gamma. \qquad (7.13)$$

При этом границы находятся из условий

$$P(\chi^2 \le \chi^2_1) = (1-\gamma)/2. \qquad (7.14)$$

$$P(\chi^2 \ge \chi^2_2) = (1-\gamma)/2. \qquad (7.15)$$

Для того, чтобы можно было воспользоваться таблицами распределения Пирсона (несимметричное распределение), преобразуем (7.14) в:

$$P(\chi^2 \ge \chi^2_1) = (1+\gamma)/2. \qquad (7.16)$$

Т.о. для нахождения доверительного интервала для дисперсии, значения концов интервала равны

$$\alpha = \frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2}; \quad \beta = \frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2}. \qquad (7.17)$$

*

<u>*Пример 7.5.*</u> По данным выборки объема n = 26 из генеральной совокупности определена несмещенная оценка дисперсии S^2 = 4. Предполагая, что исследуемый количественный признак распределен нормально, найти доверительный интервал, накрывающий дисперсию $D[X]$ с надежностью γ = 0,95.

Решение. Для $(1+\gamma)/2 = 0{,}975$ и $(1-\gamma)/2 = 0{,}025$ при $n - 1 = 25$ по таблицам (Приложение 4) находим величины $\chi^2_1 = 13{,}12$ и $\chi^2_2 = 40{,}65$.

Вычисляем границы доверительного интервала

$$\alpha = \frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2} = \frac{25\cdot 4}{40{,}65} = 2{,}46,$$

$$\beta = \frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2} = \frac{25\cdot 4}{13{,}12} = 7{,}62$$

Значит, с надежностью 0,95 можно утверждать, что неизвестное значение дисперсии находится в границах: $2{,}46 < D[X] < 7{,}62$.

*

При нахождении доверительного интервала для **среднего квадратического отклонения** $\boldsymbol{\sigma}$**,** исходя из определения доверительного интервала

$$P\,(S-\delta<\sigma<S+\delta)=\gamma, \qquad (7.18)$$

для нахождения границ интервала необходимо знать закон распределения статистики, которая для этого случая преобразуется в $\dfrac{S}{\sqrt{D[X]}}\sqrt{n-1}=\chi_{m-1}$.

Тогда

$$\frac{\sqrt{n-1}}{1+\dfrac{\delta}{S}}<\chi_{m-1}<\frac{\sqrt{n-1}}{1-\dfrac{\delta}{S}}. \qquad (7.19)$$

По заданным n и γ по таблице находим величину $q = \delta/S$.

Границы доверительного интервала

$$\alpha = S\,(1-q); \qquad \beta = S(1+q). \qquad (7.20)$$

*

<u>*Пример 7.6.*</u> По данным выборки объема n = 26 из генеральной совокупности определена оценка средеквадратического отклонения $\sqrt{S^2}$ = 2. Предполагая, что исследуемый количественный признак распределен нормально, найти доверительный интервал, накрывающий σ с надежностью γ = 0,95.

Решение. По таблице (Приложение 5) для γ = 0,95 и n – 1 = 25 находим q = 0,32. Тогда по (7.20)

α = 2(1 – 0,32) = 1,36; β = 2 (1 + 0,32) = 2,64.

Значит, с надежностью 0,95 можно утверждать, что неизвестное значение среднеквадратического отклонения находится в границах:

$$1{,}36 < \sigma < 2{,}64.$$

*

7.2 Статистические гипотезы

Статистической гипотезой называется любое предположение о виде закона распределения и (или) его параметрах.

Статистические гипотезы делятся на ***непараметрические*** (о законе распределения) и ***параметрические*** (о его параметрах).

Например, статистической является гипотеза о том, что распределение производительности труда рабочих, выполняющих одинаковую работу в одинаковых условиях, имеет нормальный закон распределения. Статистической будет также гипотеза о том, что средние размеры деталей, производимые на однотипных, параллельно работающих станках, не различаются. Часто распределение величины X известно, и по выборке наблюдений необходимо проверить предположения о значении параметров этого распределения. Такие гипотезы называются ***параметрическими***.

Статистическая гипотеза называется ***простой***, если она однозначно определяет распределение случайной величины X, в противном случае гипотеза называется ***сложной***.

Например, простой гипотезой является предположение о том, что случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией, равной единице. Если высказывается предположение, что случайная величина X имеет нормальное распределение с дисперсией, равной единице, а математическое ожидание — число из отрезка $[a, b]$, то это сложная гипотеза.

Одну из гипотез выделяют в качестве основной (или ***нулевой***) и обозначается H_0. Наряду с гипотезой H_0. рассматривают одну из ***альтернативных*** (***конкурирующих***) гипотез H_1. Например, если проверяется гипотеза о равенстве параметра Θ некоторому заданному значению Θ_0, то есть $H_0 : \Theta = \Theta_0$, то в качестве альтернативной гипотезы можно рассмотреть одну из следующих гипотез: $H_0^{(1)} : \Theta > \Theta_0$; $H_0^{(2)} : \Theta < \Theta_0$; $H_0^{(3)} : \Theta \neq \Theta_0$; $H_0^{(4)} : \Theta = \Theta_1$; где Θ_1 — заданное значение, $\Theta_1 \neq \Theta_0$. Выбор альтернативной гипотезы определяется конкретной формулировкой задачи.

Имея две гипотезы H_0 и H_1, на основе выборки прижимают либо основную, либо конкурирующую.

Правило, по которому принимается решение принять или отклонить гипотезу H_0, называется *статистическим критерием* (или просто критерием) проверки гипотезы H_0.

Статистический критерий **– это правило, по которому принимается решение по нулевой гипотезе**.

Для построения критерия выбирают *статистику К*, т. е. некоторую функцию от результатов измерений или наблюдений, находят (или заранее знают) ее распределение и (при традиционном подходе к применению статистических критериев) задаются некоторым ее значением, $k_{кр}$ вероятность превышения (или вероятность принятия меньшего значения) которого считается пренебрежимо малой и равной α.

Критическими точками (значениями) называют точки, отделяющие область принятия гипотезы от критической области. *Критической областью* называют совокупность значений статистики, при которых нулевая гипотеза отвергается.

Областью принятия гипотезы называется совокупность значений статистики, при которых гипотезу не отвергают. Если наблюденное значение статистики принадлежит критической области – гипотезу отвергают. Если значение статистики «попало» в область допустимых значений, то гипотезу не отвергают.

Т.е. могут быть допущены **ошибки двух родов**.

Ошибка первого рода состоит в том, что отвергается нулевая гипотеза, когда она на самом деле верна.

Ошибка второго рода – отвергается альтернативная гипотеза, когда она на самом деле верна.

Вероятность ошибки первого рода (обозначается через α) называется уровнем значимости критерия. Уровень значимости α определяет размер критической области. Он задается обычно заранее. Чем меньше α, тем меньше вероятность отклонить верную гипотезу. Вероятность ошибки второго рода обозначают β. Вероятность β зависит от конкурирующей гипотезы и может быть вычислена только, если она является простой. Величина $1 - \beta$ называется *мощностью критерия*. Чем выше мощность критерия, тем он эффективнее. Чем меньше вероятность ошибки 1-го рода, тем больше вероятность ошибки 2-го рода.

Современный подход к применению статистических критериев состоит в том, что уровень значимости не задают заранее, а определяют по наблюденному значению статистики примененного критерия. Если этот уровень превышает 0,1, то принято считать, что нулевая гипотеза почти наверняка верна. Если этот уровень равен 0,01 или менее, то принято считать, что нулевая гипотеза почти наверняка неверна (в этом случае вероятность того, что она правильна всего лишь 1% или менее). Область значений α между 0,01 и 0,1 представляет собой область сомнений, когда желательно повторение опыта. Понятно, что оснований для сомнений тем больше, чем меньше α.

Значение $\alpha = 0{,}05$ считается таким, когда шансы отвергнуть правильную гипотезу (отвергнуть H_0, когда она верна) или принять неверную гипотезу (не отвергнуть H_0, когда она неверна) приблизительно равны.

Вопросы для самоконтроля.

1. Что понимают под оцениванием параметра? Какие виды оценивания применяются?
2. Для чего применяют точечное оценивание? Какими свойствами должны обладать точечные статистические оценки?
3. Как определяется смещение оценки? Дайте характеристику этого свойства.
4. Дайте определение интервального оценивания. Сформулируйте задачу интервального оценивания.
5. Статистические гипотезы – определение, классификация. Определение ошибки первого и второго рода.

8 СТРУКТУРНЫЕ МОДЕЛИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

8.1 Понятие технической системы и ее структуры

Большинство технических систем являются сложными системами, состоящими из отдельных узлов, деталей, агрегатов, систем управления и т.п.

Под ***сложной системой*** понимается объект, предназначенный для выполнения заданных функций, который может быть расчленен на элементы (компоненты), каждый из которых также выполняет определенные функции и находится во взаимодействии с другими элементами системы. В зависимости от условий решаемой задачи один и тот же объект может рассматриваться или как элемент, или как система.

Каждый элемент выполняет одну или несколько определенных функций. При эксплуатации вследствие различных причин (износа, коррозии, перегрузки, влияния внешних воздействий) элемент частично или полностью теряет свою работоспособность, что приводит к невыполнению соответствующих функций, снижает эффективность функционирования объекта, создает условия, благоприятствующие возникновению аварий, или непосредственно их вызывает.

Например, типичные элементы аппарата с мешалкой (реактора, промывателя) – корпус, перемешивающее устройство, электродвигатель привода мешалки, входной и выходной патрубки. Для рекуперативного теплообменника – это кожух, трубки, входной и выходной патрубки, насосы для прокачки жидкости.

Под словом «элемент» следует понимать не только неразложимую часть системы, но и любое устройство, блок, надежность которого изучается независимо от надежности составляющих его частей.

Система (подсистема, элемент) имеет входы и выходы.

Входом называется дискретное или непрерывное множество «контактов», через которые воздействие среды передается системе. **Выход** – множество контактов, через которые система воздействует на среду. Любой элемент системы имеет по крайней мере один выход и один вход. Воздействие может состоять в передаче вещества, энергии, информации или комбинации этих компонентов. Таким образом, система – не множество подсистем, а целостный объект, допускающий различные членения на подсистемы (быть может, даже бесконечное число членений). Поэтому система не тождественна никаким ее членениям.

С позиций надежности сложная система обладает как отрицательными, так и положительными свойствами.

*Факторы, о**трицательн**о влияющие на надежность сложных систем, следующие:*

- во-первых, это большое число элементов, отказ каждого из которых может привести к отказу всей системы;

- во-вторых, оценить работоспособность сложных систем весьма затруднительно с точки зрения статистических данных, т.к. они часто являются уникальными или имеются в небольших количествах;

- в-третьих, даже у систем одинакового предназначения каждый экземпляр имеет свои незначительные вариации свойств отдельных элементов, что сказывается на выходных параметрах системы. Чем сложнее система, тем большими индивидуальными особенностями она обладает.

*Однако сложные системы обладают и такими свойствами, которые **положительно** влияют на их надежность:*

- сложным системам свойственна самоорганизация, саморегулирование или самоприспособление, когда система способна найти наиболее устойчивое для своего функционирования состояние;

- для сложной системы часто возможно восстановление работоспособности по частям, без прекращения ее функционирования;
- не все элементы системы одинаково влияют на надежность сложной системы.

***Анализ работоспособности сложной системы связан с изучением ее структуры и тех взаимосвязей, которые определяют ее надежное функционирование*.**

При анализе надежности сложных систем их разбивают на элементы (компоненты) с тем, чтобы вначале рассмотреть параметры и характеристики элементов, а затем оценить работоспособность всей системы. При этом возможно восстановление работоспособности элемента независимо от других частей и элементов системы.

Анализ надежности сложных систем имеет свои специфические особенности. Влияние различных отказов и снижение работоспособности элементов системы по-разному скажутся на надежности всей системы.

При анализе надежности сложной системы все ее элементы и компоненты целесообразно разделить на следующие группы.

1) Элементы, отказ которых практически не влияет на работоспособность системы (деформация ограждающего кожуха машины, изменение окраски поверхности и т.п.). Отказы (т.е. неисправное состояние) этих элементов могут рассматриваться изолированно от системы.
2) Элементы, работоспособность которых за рассматриваемый период времени практически не изменяется (станины и корпусные детали, малонагруженные элементы с большим запасом прочности).
3) Элементы, ремонт или регулировка которых возможна при работе изделия или во время остановок, не влияющих на его эффективность (подналадка и замена режущего инструмента на станке, регулировка холостого хода карбюратора автомобильного двигателя).
4) Элементы, отказ которых приводит к отказам системы.

Таким образом, рассмотрению и анализу надежности подлежат лишь элементы последней группы. Как правило, имеется ограниченное число элементов, которые в основном и определяют надежность изделия. Эти элементы и подсистемы выявляются при рассмотрении структурной схемы параметрической надежности.

***Структурная схема надежности определяет функциональную взаимосвязь между работой подсистем (или элементов) в определенной последовательности*.**

Эту схему составляют по принципу функционального назначения соответствующих подсистем (или элементов) при выполнении ими определенной части работы, выполняемой системой в целом.

На этапе составления схемы, во-первых: классифицируется понятие (вид) отказов, который существенным образом влияет на работоспособность системы. Во-вторых, определяется состав системы в виде отдельных элементов, в качестве которых могут выступать, например, электрические соединения пайкой, сжатием или сваркой, а также другие соединения (штепсельные и пр.), поскольку на их долю приходится 10 – 50 % общего числа отказов. В-третьих, как правило, имеется неполная информация о показателях надежности элементов, поэтому приходится либо интерполировать показатели, либо использовать показатели аналогов.

Техническая система может быть сконструирована таким образом, что для успешного ее функционирования необходима исправная работа всех ее элементов. В этом случае ее называют ***системой с последовательным соединением (последовательной***

системой). Если при отказе одного элемента системы другой элемент способен выполнить его функции, то такую систему называют ***параллельной.*** Очень часто системы обладают свойствами как параллельных, так и последовательных систем — системы со ***смешанным соединением***.

8.2 Расчет надежности систем с последовательным соединением элементов

Существуют структурные схемы надежности системы с последовательным соединением элементов (рис. 8.1), когда отказ одного элемента вызывает отказ другого элемента, а затем третьего и т.д. Например, большинство приводов машин и механизмы передач подчиняются этому условию. Так, если в приводе машины выйдет из строя любая шестерня, подшипник, муфта, рычаг управления, электродвигатель, насос смазки, то весь привод перестанет функционировать. При этом отдельные элементы в этом приводе не обязательно должны быть соединены последовательно.

Такую структурную схему называют *схемой с последовательным соединением зависимых элементов.* В этом случае надежность системы определяют по теореме умножения для *зависимых событий.*

Рассмотрим систему, состоящую из двух или более элементов. Пусть A – событие, состоящее в том, что система работает безотказно. а A_i (i = 1, 2,..., n) – события, состоящие в исправной работе всех ее элементов. Далее предположим, что событие A имеет место тогда и только тогда, когда имеют место все события A_i, т.е. система исправна тогда и только тогда, когда исправны все ее элементы. В этом случае систему называют *последовательной системой.*

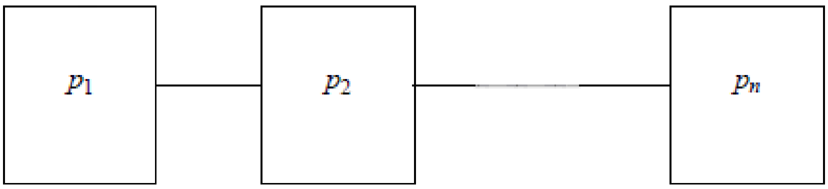


Рисунок 8.1 – Структурная схема надежности системы с последовательным соединением элементов

Известно, что отказ любого элемента такой системы приводят, как правило, к отказу системы. Поэтому вероятность безотказной работы системы определяют как произведение вероятностей для *независимых событий.*

$$P(A)=\prod_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{8.1}$$

Обозначив $P(A) = P$; $P(A_i) = p_i$, получим

$$P=\prod_{i=1}^{n} p_i , \tag{8.2}$$

где P – надежность.

При одинаковой надежности элементов формула (8.2) вероятностей безотказной работы примет вид:

$$P(t) = P^n{}_i.$$

Сложные системы, состоящие из элементов высокой надежности, могут обладать низкой надежностью за счет наличия большого числа элементов. Например, если узел состоит всего из 50 деталей, а вероятность безотказной работы каждой детали за выбранный промежуток времени составляет P_i = 0,99, то вероятность безотказной работы узла будет $P(t)$ = $(0{,}99)^{50}$ = 0,55.

Если же узел с аналогичной безотказностью элементов состоит из 400 деталей, то $P(t)$ = $(0{,}99)^{400}$ = 0,018, т.е. узел становится практически неработоспособным.

*

Пример 8.1. Определить надежность автомобиля (системы) при движении на заданное расстояние, если известны надежности следующих подсистем: системы зажигания p_1 = 0,99; системы питания топливом и смазкой p_2 = 0,999; системы охлаждения p_3 = 0,998; двигателя p_4 = 0,985; ходовой части p_5 = 0,997.

Решение. Известно, что отказ любой подсистемы приводит к отказу автомобиля. Для определения надежности автомобиля используем формулу (8.2)

$$P = p_1\, p_2\, p_3\, p_4\, p_5 = 0{,}990{,}9990{,}9980{,}9850{,}997 = 0{,}979.$$

Если причина выхода из строя деталей машин или узла связана только с внезапными отказами, которые подчиняются экспоненциальному закону, то

$$P_1 = e^{-\lambda_1 t};\ \ P_2 = e^{-\lambda_2 t},\ \ldots$$

то вероятность безотказной работы также подчиняется экспоненциальному закону

$$P(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)t} = e^{-\lambda_0 t},$$

где $\lambda_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

*

8.3 Расчет надежности систем с параллельным соединением элементов

В практике проектирования сложных технических систем часто используют схемы с *параллельным соединением элементов* (рис. 8.2), которые построены таким образом, что отказ системы возможен лишь в случае, когда отказывают все ее элементы, т.е. система исправна, если исправен хотя бы один ее элемент. Такие схемы надежности характерны для ТС, в которых элементы дублируются или резервируются, т.е. параллельное соединение используется как метод повышения надежности.

Для отказа системы с параллельным соединением элементов в течение наработки t необходимо и достаточно, чтобы все ее элементы отказали в течение этой наработки. Так что отказ системы заключается в совместном отказе всех элементов, вероятность чего (при допущении независимости отказов) может быть найдена по теореме умножения вероятностей как произведение вероятностей отказа элементов:

$$Q(t) = q_1 q_2 \ldots q_n = \prod_{i=1}^{n} q_i = \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i), \tag{8.3}$$

Соответственно, вероятность безотказной работы

$$P(t) = 1 - Q(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} q_i = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i).$$

Для систем из равнонадежных элементов ($p_i = p$)

$$P(t) = 1 - (1 - p)^n. \qquad (8.4)$$

т.е. надежность системы с параллельным соединением повышается при увеличении числа элементов (например, при p = 0,9 и n = 2 P = 0,99, а при n = 3 P = 0,999).

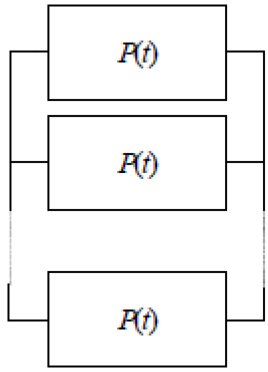


Рисунок 8.2 – Структурная схема надежности системы с параллельным соединением элементов

Поскольку $q_i < 1$, то произведение в правой части (8.3) всегда меньше любого из сомножителей, т.е. **вероятность отказа системы не может быть выше вероятности самого надежного ее элемента** («лучше лучшего») и даже из сравнительно ненадежных элементов возможно построение вполне надежной системы.

8.4 Структурные схемы надежности систем с другими видами соединения элементов

8.4.1. Параллельно-последовательное соединение элементов. В практике проектирования технических систем часто используют структурные схемы надежности с ***параллельно-последовательным соединением*** *(смешанным)* элементов.

*

Пример 8.2. Техническая система предназначена для выполнения некоторой задачи. С целью обеспечения работоспособности система спроектирована со смешанным соединением элементов (рис. 8.3.).

Определить надежность системы, если известно, что надежность ее элементов равна p_1 = 0,99; p_2 = 0,98; p_3 = 0,9; p_4 = 0,95; p_5 = 0,9; p_6 = 0,9; p_7 = 0,8; p_8 = 0,75; p_9 = 0,7.

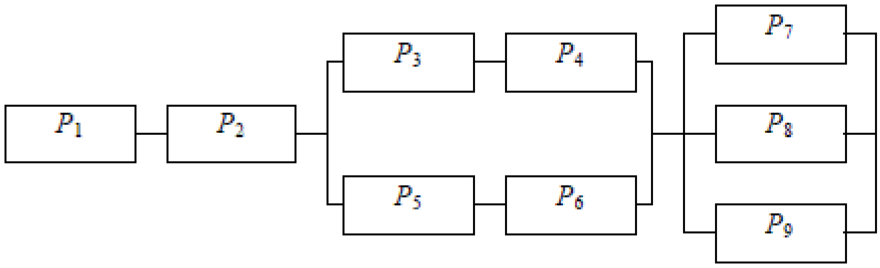


Рисунок 8.3 – Структурная схема надежности технической системы

Решение. При расчете надежности воспользуемся формулами как для последовательного, так и для параллельного соединения элементов:

$$P = p_1\, p_2[1 - (1 - p_3\, p_4)(1 - p_5\, p_6)][1 - (1 - p_7)(1 - p_8)(1 - p_9)] =$$
$$= 0{,}99 \cdot 0{,}98[1 - (1 - 0{,}9 \cdot 0{,}95)(1 - 0{,}9 \cdot 0{,}9)][1 - (1 - 0{,}8)(1 - 0{,}75)(1 - 0{,}7)] = 0{,}927.$$

*

При расчете надежности системы данную систему представляют в виде структурной схемы, в которой элементы, отказ которых приводит к отказу всей системы, изображаются последовательно, а резервные элементы или цепи – параллельно.

Конструктивное оформление элементов, их последовательное или параллельное соединение в конструкции еще не означает аналогичного изображения в структурной схеме надежности.

Разницу между конструктивной (монтажной) и структурной схемами можно показать на примере работы двух фильтров гидросистемы, которые для повышения надежности работы системы могут быть установлены (рис. 8.4) последовательно или параллельно.

Отказ фильтра может произойти в результате двух основных причин – засорения сетки и ее разрыва.

В случае засорения сетки структурная схема надежности соответствует конструктивной. Последовательное соединение фильтров в этом случае только снизит надежность системы, так как отказ любого из фильтров приведет к отказу системы, поскольку необходимый поток жидкости не будет проходить сквозь фильтр.

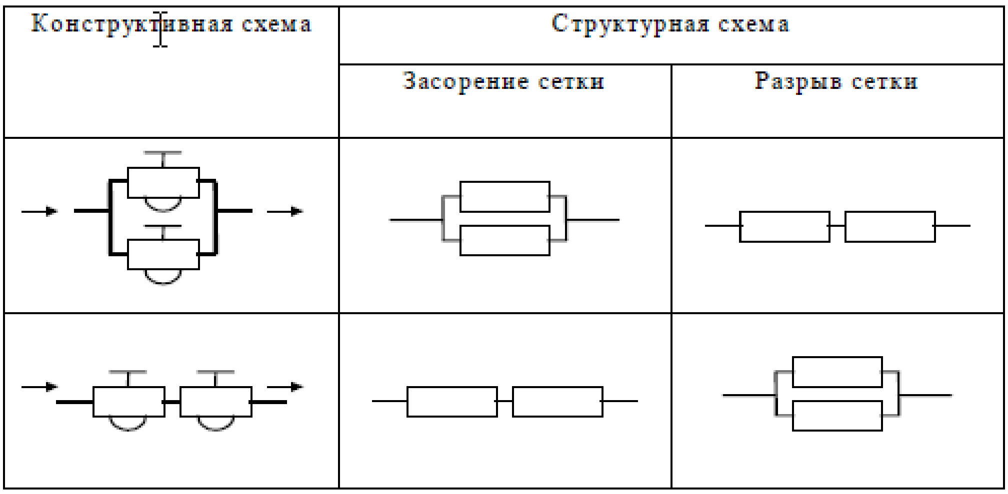


Рисунок 8.4 – Конструктивные и структурные схемы надежности соединения фильтров при различных видах отказов

При отказе фильтра из-за разрыва сетки структурная схема надежности противоположна конструктивной. При параллельном конструктивном выполнении отказ любого фильтра будет означать отказ системы, так как при разрыве сетки поток жидкости пойдет через данный фильтр и не будет происходить ее фильтрация. Поэтому структурная схема надежности изображена в виде последовательных элементов. При последовательном конструктивном включении фильтров, наоборот, разрыв сетки одного из них не будет означать отказа, поскольку дублирующий фильтр продолжает выполнять свои функции. Поэтому структурная схема надежности изображена в виде параллельного соединения.

8.4.2. Системы типа «*m* из *n*». *Систему типа* «*m* из *n*» можно рассматривать как вариант системы с параллельным соединением элементов, отказ которой произойдет, если из n элементов, соединенных параллельно, работоспособными окажутся менее m элементов ($m < n$).

На рис. 8.5 представлена система «2 из 5», которая работоспособна, если из пяти ее элементов работают любые два, три, четыре или все пять (на схеме пунктиром обведены функционально необходимые два элемента, причем выделение элементов 1 и 2 произведено условно, в действительности все пять элементов равнозначны).

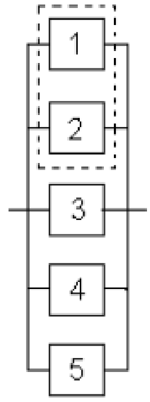


Рисунок 8.5 – Система «2 из 5»

Системы типа «*m* из *n*» наиболее часто встречаются в электрических и связных системах (при этом элементами выступают связующие каналы), технологических линий, а также при структурном резервировании.

Для расчета надежности систем типа «*m* из *n*» при сравнительно небольшом количестве элементов можно воспользоваться *методом прямого перебора*. Он заключается в определении работоспособности каждого из возможных состояний системы, которые определяются различными сочетаниями работоспособных и неработоспособных состояний элементов.

Все состояния системы «2 из 5» занесены в табл. 8.1 (в таблице работоспособные состояния элементов и системы отмечены знаком «+», неработоспособные – знаком «–»).

Для данной системы работоспособность определяется лишь количеством работоспособных элементов.

Таблица 8.1

№ состояния	Состояние элементов					Состояние системы	Вероятность работоспособного состояния системы
	1	2	3	4	5		
1	+	+	+	+	+	+	p^5
2	+	+	+	+	–		
3	+	+	+	–	+		
4	+	+	–	+	+	+	$p^4(1-p)$
5	+	–	+	+	+		
6	–	+	+	+	+		
7	+	+	+	–	–	+	$p^3(1-p)^2$
8	+	+	–	+	–		
9	+	–	+	+	–		
10	–	+	+	+	–		
11	+	+	–	–	+		
12	+	–	+	–	+		
13	–	+	+	–	+		

14	+	–	–	+	+		
15	–	+	–	+	+		
16	–	–	+	+	+		
17	+	+	–	–	–		
18	+	–	+	–	–		
19	–	+	+	–	–		
20	+	–	–	–	+		
21	–	+	–	–	+	+	$p^2(1-p)^3$
22	–	–	–	+	+		
23	+	–	–	+	–		
24	–	+	–	+	–		
25	–	–	+	–	+		
26	–	–	+	+	–		
27	+	–	–	–	–		
28	–	+	–	–	–		
29	–	–	+	–	–	–	$p(1-p)^4$
30	–	–	–	+	–		
31	–	–	–	–	+		
32	–	–	–	–	–	–	$(1-p)^5$

По теореме умножения вероятностей вероятность любого состояния определяется как произведение вероятностей состояний, в которых пребывают элементы.

Например, в строке 9 описано состояние системы, в которой отказали элементы 2 и 5, а остальные работоспособны. При этом условие «2 из 5» выполняется, так что система в целом работоспособна. Вероятность такого состояния (предполагается, что все элементы равнонадежны):

$$P_9 = p_1 q_2 p_3 p_4 q_5 = p^3 q^2.$$

С учетом всех возможных состояний вероятность безотказной работы системы может быть найдена по теореме сложения вероятностей всех работоспособных сочетаний. Поскольку в табл. 8.1 количество неработоспособных состояний меньше, чем работоспособных (соответственно 6 и 26), проще вычислить вероятность отказа системы. Для этого суммируются вероятности неработоспособных состояний (где не выполняется условие «2 из 5»).

Вероятность отказа системы:

$$Q = P_{27} + P_{28} + P_{29} + P_{30} + P_{31} + P_{32} =$$
$$= 5\,p(1-p)^4 + (1-p)^5 = 1 - 10\,p^2 + 20\,p^3 - 15\,p^4 + 4\,p^5$$

Тогда вероятность безотказной работы системы:

$$P = 1 - q \ = 10\,p^2 - 20\,p^3 + 15\,p^4 - 4\,p^5.$$

Расчет надежности системы «m из n» может производиться ***комбинаторным методом***, в основе которого лежит формула **биномиального распределения.**

Биномиальному распределению подчиняется дискретная случайная величина k – число появлений некоторого события в серии из n опытов, если в отдельном опыте вероятность появления события составляет p. При этом вероятность появления события ровно k раз определяется

$$P_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \ , \qquad (8.5)$$

где C^k_n – биноминальный коэффициент, число сочетаний по k из n (т.е. сколькими разными способами можно реализовать ситуацию «k из n»).

$$C_n^k = \frac{n!}{k!((n-k)!} . \qquad (8.6)$$

Поскольку для отказа системы «m из n» достаточно, чтобы количество исправных элементов было меньше m, вероятность отказа может быть найдена по теореме сложения вероятностей для $k = 0, 1, \ldots(m-1)$:

$$Q = \sum_{k=0}^{m-1} P_k = \sum_{k=0}^{m-1} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} . \qquad (8.7)$$

Аналогичным образом можно найти вероятность безотказной работы как сумму (8.5) для $k = m, m + 1, \ldots, n$:

$$P = \sum_{k=m}^{n} P_k = \sum_{k=m}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} . \qquad (8.8)$$

Для системы «2 из 5» (рис. 8.5) по формуле (8.8) получим:

$$P = C_5^2 p^2 (1-p)^3 + C_5^3 p^3 (1-p)^2 + C_5^4 p^4 (1-p) + C_5^5 p^5 =$$
$$= 10\,p^2(1-p)^3 + 10\,p^3(1-p)^2 + 5\,p^4(1-p) + p^5.$$

Тогда вероятность безотказной работы системы:

$$P = 10\,p^2 - 20\,p^3 + 15\,p^4 - 4\,p^5$$

В табл. 8.2 приведены формулы для расчета вероятности безотказности систем типа «m из n» при $m \le n \le 5$. Очевидно, при $m = 1$ система превращается в обычную систему с параллельным соединением элементов, а при $m = n$ – с последовательным соединением.

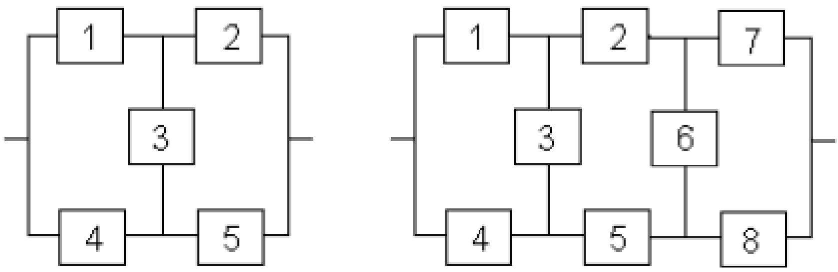
Таблица 8.2

	Общее число элементов , n				
m	1	2	3	4	5
1	p	$2p-p^2$	$3p-3p^2+p^3$	$4p-6p^2+4p^3-p^4$	$5p-10p^2+10p^3-5p^4+p^5$
2	-	p^2	$3p^2-2p^3$	$6p^2-8p^3+3p^4$	$10p^2-20p^3+15p^4-4p^5$
3	-	-	p^3	$4p^3-3p^4$	$10p^3-15p^4+6p^5$
4	-	-	-	p^4	$5p^4-4p^5$
5	-	-	-	-	p^5

8.4.3. Мостиковые схемы. Широкое применение в проектировании нашли так называемые *мостиковые схемы.*

Мостиковая структура (рис. 8.6, а, б) не сводится к параллельному или последовательному типу соединения элементов, а представляет собой параллельное соединение последовательных цепочек элементов с *диагональными* элементами, включенными между узлами различных параллельных ветвей (элемент 3 на рис. 8.6, а, элементы 3 и 6 на рис. 8.6, б). Работоспособность такой системы определяется не только количеством отказавших элементов, но и их положением в структурной схеме.

Например, работоспособность технической системы (рис. 8.6, а), будет утрачена при одновременном отказе элементов 1 и 2, или 4 и 5, или 2, 3 и 4 и т.д. В то же время, отказ элементов 1 и 5, или 2 и 4, или 1, 3 и 4, или 2, 3 и 5 к отказу системы не приводит.



а) б)

Рисунок 8.6 – Мостиковые схемы

Для расчета надежности мостиковых систем можно воспользоваться *методом прямого перебора*, как это было сделано для систем «m из n» (п. 8.4.2), но при анализе работоспособности каждого состояния системы необходимо учитывать не только число отказавших элементов, но и их положение в схеме (табл. 8.3).

Таблица 8.3.

Таблица состояний мостиковой системы

<table>
<tr><th rowspan="2">№ состояния</th><th colspan="5">Состояние элементов</th><th rowspan="2">Состояние системы</th><th rowspan="2">Вероятность работоспособного состояния системы при равнонадежных элементах</th></tr>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th></tr>
<tr><td>1</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>p^5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>–</td><td rowspan="5">+</td><td rowspan="5">$p^4(1-p)$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>–</td><td>+</td></tr>
<tr><td>4</td><td>+</td><td>+</td><td>–</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>5</td><td>+</td><td>–</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>6</td><td>–</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>7</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td rowspan="10">$p^3(1-p)^2$</td></tr>
<tr><td>8</td><td>+</td><td>+</td><td>–</td><td>+</td><td>–</td><td rowspan="8"></td></tr>
<tr><td>9</td><td>+</td><td>–</td><td>+</td><td>+</td><td>–</td></tr>
<tr><td>10</td><td>–</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>–</td></tr>
<tr><td>11</td><td>+</td><td>+</td><td>–</td><td>–</td><td>+</td></tr>
<tr><td>12</td><td>+</td><td>–</td><td>+</td><td>–</td><td>+</td></tr>
<tr><td>13</td><td>–</td><td>+</td><td>+</td><td>–</td><td>+</td></tr>
<tr><td>14</td><td>+</td><td>–</td><td>–</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>15</td><td>–</td><td>+</td><td>–</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>16</td><td>–</td><td>–</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>–</td></tr>
<tr><td>17</td><td>+</td><td>+</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td rowspan="3">–</td><td rowspan="3">$p^2(1-p)^3$</td></tr>
<tr><td>18</td><td>+</td><td>–</td><td>+</td><td>–</td><td>–</td></tr>
<tr><td>19</td><td>–</td><td>+</td><td>+</td><td>–</td><td>–</td></tr>
</table>

20	+	–	–	–	+		
21	–	+	–	–	+	+	
22	–	–	–	+	+	–	
23	+	–	–	+	–	+	
24	–	+	–	+	–		
25	–	–	+	–	+		
26	–	–	+	+	–		
27	+	–	–	–	–	–	
28	–	+	–	–	–		
29	–	–	+	–	–		$p(1-p)^4$
30	–	–	–	+	–		
31	–	–	–	–	+		
32	–	–	–	–	–		$(1-p)^5$

Вероятность безотказной работы системы определяется как сумма вероятностей всех работоспособных состояний:

$$\begin{aligned} P = {} & p_1p_2p_3p_4p_5 + p_1p_2p_3p_4q_5 + p_1p_2p_3q_4p_5 + p_1p_2q_3p_4p_5 + \\ & + p_1q_2p_3p_4p_5 + q_1p_2p_3p_4p_5 + p_1p_2q_3p_4q_5 + p_1q_2p_3p_4q_5 + \\ & + q_1p_2p_3p_4q_5 + p_1p_2q_3q_4p_5 + p_1q_2p_3q_4p_5 + q_1p_2p_3q_4p_5 + \\ & + p_1q_2q_3p_4p_5 + q_1p_2q_3p_4p_5 + q_1q_2q_3p_4p_5 + p_1q_2q_3p_4q_5 \end{aligned} \tag{8.9}$$

В случае равнонадежных элементов:

$$P = p^5 + 5p^4q + 8p^3q^2 + 2p^2q^3 = 2p^5 - 5p^4 + 2p^3 + 2p^2 . \tag{8.10}$$

Метод прямого перебора эффективен только при малом количестве элементов n поскольку число состояний системы составляет 2^n.

Например, для схемы на рис. 8.6, б их количество составит уже 256. Некоторое упрощение достигается, если в таблицу состояний включать только сочетания, отвечающие работоспособному (или только неработоспособному) состоянию системы в целом.

Для анализа надежности ТС, структурные схемы которых не сводятся к параллельному или последовательному типу, можно воспользоваться также *методом логических схем с применением алгебры логики* (булевой алгебры). Применение этого метода сводится к составлению для технической системы формулы алгебры логики, которая определяет условие работоспособности системы. При этом для каждого элемента и системы в целом рассматриваются два противоположных события – отказ и сохранение работоспособности.

Вопросы для самоконтроля.

1. Дайте характеристику сложной системы. Какие факторы отрицательно влияют на ее надежность.
2. Дайте характеристику сложной системы. Какие факторы положительно влияют на ее надежность.
3. Дайте характеристику структурной схемы надежности с последовательным соединением элементов. Запишите выражение для определения вероятности безотказной работы системы с такой структурной схемой.

4. Дайте характеристику структурной схемы надежности с параллельным соединением элементов. Запишите выражение для определения вероятности безотказной работы системы с такой структурной схемой.
5. Дайте характеристику структурной схемы надежности с последовательно-параллельным соединением элементов. Запишите выражение для определения вероятности безотказной работы системы с такой структурной схемой на примере.

9 РАСЧЕТ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ

9.1 Общие положения

Для исследования надежности оборудования и технологических схем, для разработки мероприятий по обеспечению и оптимизации их надежности необходимо, прежде всего, иметь количественные характеристики (оценки) этого комплексного свойства.

Показатель надежности – это количественная характеристика, или оценка, одного либо нескольких свойств, составляющих его надежность.

Показатель надежности может быть как размерной, так и безразмерной величиной.

Все основные показатели надежности разделяют на два класса: ***единичные*** и ***комплексные***.

К единичным относят:

	Показатели
Безотказность	Вероятность безотказной работы Средняя наработка до отказа Гамма-процентная наработка до отказа Средняя наработка на отказ Интенсивность отказов Параметр потока отказов
Долговечность	Средний ресурс Гамма-процентный ресурс Назначенный ресурс Средний срок службы Гамма-процентный срок службы Назначенный срок службы
Ремонтопригодность	Вероятность восстановления в заданное время Среднее время восстановления Интенсивность восстановления
Сохраняемость	Средний срок сохраняемости Гамма-процентный срок сохраняемости

Оценка показателей надежности изделий должна осуществляться во взаимосвязи с эффективностью их функционирования и экономической эффективностью.

Методы оценки надежности и эффективности для изделий химического машиностроения устанавливаются ГОСТами и руководящими нормативными документами. Например, **РД 26-01-143-83 НАДЕЖНОСТЬ ИЗДЕЛИЙ ХИМИЧЕСКОГО МАШИНОСТРОЕНИЯ. Оценка надежности и эффективности при проектировании**. В этом документе обосновываются численные значения показателей надежности и обоснование численных значений показателей надёжности и эффективности изделия, подлежащих включению в конструкторскую и нормативно-техническую документацию; обосновываются технико-экономические требования к разрабатываемому изделию, обеспечивающие заданный уровень его надёжности и эффективности. В задачах, также, обеспечение сравнения вариантов конструктивных решений изделия и прогнозирование надёжности и эффективности функционирования изделий для учета в системе ценообразования.

Оценка показателей надёжности и эффективности функционирования изделий химического машиностроения должна проводиться **расчётным методом.**

Для изделий (элементов изделия), не имеющих аналогов, оценка показателей надежности должна проводиться экспертным методом в соответствии с ГОСТ 23554.0-79, ГОСТ 23554.1-79 и ГОСТ 23554.2-81.

Расчет показателей надежности выполняют на двух стадиях:

- ***предварительный*** (ориентировочный) расчет – на стадии технического задания на разработку изделия (ТЗ) с целью оценки значений показателей в выдвигаемых требованиях заказчика и служит основанием для их внесения в ТЗ;
- ***уточненный*** расчет – на стадии технического проекта (ТП) с целью подтверждения соответствия значений показателей требованиям ТЗ и служит основанием для их включения в конструкторскую документацию.

Показатели надёжности изделия, нормируемые в соответствии с РД РТМ 26-01-135-81 и ОСТ 26-01-150-82 и необходимые для расчета эффективности изделия, приведены в табл. 9.1.

Таблица 9.1

<table>
<tr><td>Наименование показателей</td><td>Обозначение</td><td>Определение по</td></tr>
<tr><td>Показатели безотказности
Наработка на отказ, ч</td><td>T</td><td rowspan="2">ГОСТ 13377-75</td></tr>
<tr><td>Показатели долговечности
Ресурс между плановыми ремонтами
текущими, ч</td><td>$T_{рт}$</td></tr>
<tr><td>средними, ч
капитальными, ч</td><td>$T_{рс}$
$T_{рк}$</td><td>ГОСТ 18322-78</td></tr>
<tr><td>Срок службы до списания, лет</td><td>$T_{сл}$</td><td rowspan="3">ГОСТ 13377-75</td></tr>
<tr><td>Показатели ремонтопригодности</td><td></td></tr>
<tr><td>Среднее время восстановления, ч</td><td>$T_{в}$</td></tr>
<tr><td>Продолжительность плановых ремонтов</td><td></td><td rowspan="4">ГОСТ 18322-78</td></tr>
<tr><td>текущего, ч</td><td>$T_{пт}$</td></tr>
<tr><td>среднего, ч</td><td>$T_{пс}$</td></tr>
<tr><td>капитального, ч</td><td>$T_{пк}$</td></tr>
<tr><td>Комплексные показатели</td><td></td><td rowspan="3">ГОСТ 13377-75</td></tr>
<tr><td>Коэффициент готовности</td><td>$K_{г}$</td></tr>
<tr><td>Коэффициент технического использования</td><td>$K_{ти}$</td></tr>
</table>

Расчету надежности должен предшествовать анализ условий эксплуатации и конструкции изделия. При анализе определяются элементы (сборочные единицы, детали), приводящие к отказам изделия, и взаимосвязь отказывающих элементов; выявляются факторы, приводящие к разрушению элементов изделия, соответствующий им характер проявления разрушения (постепенный или внезапный) и возможность наблюдения за разрушением (или его проявлением). Наличие последнего обстоятельства дает возможность предупреждать отказы путем своевременного проведения ремонта (технического обслуживания) и является основой при определении системы планово-предупредительных ремонтов и технического обслуживания.

Показатели надежности и эффективности функционирования рассчитывают исходя из годового фонда времени (8640 ч), т. к. экономические характеристики, используемые в расчете экономической эффективности, определяются за годовой цикл эксплуатации (период между ежегодными остановочными ремонтами, включая время простоя в одном из них).

Исходными данными для расчета надежности и эффективности функционирования разрабатываемого изделия являются:

1) показатели надежности элементов (сборочных единиц, деталей) аналога, эксплуатируемого в сходных условиях, полученные в соответствии с РД РТМ 26-01-136-81 в виде «точечных» оценок;
2) техническая характеристика разрабатываемого изделия, оговоренная в конструкторской документации.

Исходными данными для расчета надежности объекта могут быть (в соответствии с ГОСТ Надежность в технике. Расчет надежности. Основные положения):

1) априорные данные о надежности объектов-аналогов, составных частей и комплектующих изделий рассматриваемого объекта по опыту их применения в аналогичных или близких условиях;
2) оценки показателей надежности (параметры законов распределения характеристик надежности) составных частей объекта и параметров примененных в объекте материалов, полученные экспериментальным или расчетным способом непосредственно в процессе разработки (изготовления, эксплуатации) рассматриваемого объекта и его составных частей;
3) расчетные и/или экспериментальные оценки параметров нагруженности примененных в объекте составных частей и элементов конструкции.

Источниками исходных данных для расчета надежности объекта могут быть:

- стандарты и технические условия на составные части объекта, применяемые в нем комплектующие элементы межотраслевого применения, вещества и материалы;
- справочники по надежности элементов, свойствам веществ и материалов, нормативам продолжительности (трудоемкости, стоимости) типовых операций ТО и ремонта и другие информационные материалы;
- статистические данные (банки данных) о надежности объектов-аналогов, входящих в их состав элементов, свойствах применяемых в них веществ и материалов, о параметрах операций ТО и ремонта, собранные в процессе их разработки, изготовления, испытаний и эксплуатации;
- результаты прочностных, электрических, тепловых и иных расчетов объекта и его составных частей, включая расчеты показателей надежности составных частей объекта.

При наличии нескольких источников исходных данных для расчета надежности объекта приоритеты в их использовании или методы объединения данных из разных источников должны быть установлены в методике расчета. В расчете надежности, включаемом в комплект рабочей документации на объект, предпочтительным должно быть применение исходных данных из стандартов и технических условий на составные части, элементы и материалы.

Для расчёта надёжности и эффективности функционирования на основании конструктивной схемы изделия и критериев его отказа следует составлять структурную схему расчёта надёжности, состоящую из последовательно соединённых элементов – сборочных единиц (деталей), выход из строя каждой из которых приводит к отказу изделия.

Расчёт рекомендуется выполнять в следующем порядке:

1) определение показателей безотказности;
2) определение показателей долговечности;
3) определение показателей ремонтопригодности;

4) определение комплексных показателей надёжности и эффективности функционирования.

Все свойства надёжности изделия (безотказность, долговечность и ремонтопригодность) взаимосвязаны, поэтому изменение одних показателей влечёт за собой изменение других.

9.2 Определение и расчет показателей надежности

В качестве исходных данных для расчёта безотказности разрабатываемого изделия используют значения наработки на отказ (средней наработки до отказа) элементов изделия-аналога или другого изделия в сходных условиях эксплуатации.

Средняя наработка до отказа (T_i) – математическое ожидание наработки объекта до первого отказа.

Момент первого порядка (математическое ожидание) наработки до первого отказа $m_1(\tau)$ обозначают T_1 и называют средней наработкой до отказа (или средним временем безотказной работы):

$$T_1 = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} [1 - F(t)] dt. \tag{9.1}$$

Поскольку вероятность безотказной работы $P(t)$ связана с ***функцией распределения*** $F(t)$ и ***плотностью распределения*** $f(t)$ наработки до отказа зависимостью,

$$F(t) = 1 - P(t), \tag{9.2}$$

то T_1 можно выразить через вероятность безотказной работы:

$$T_1 = \int_0^{\infty} P(t) dt.$$

Статистическая оценка для средней наработки до отказа однотипных объектов равна

$$T_1^* = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} t_j . \tag{9.3}$$

Здесь N – число работоспособных объектов при $t = 0$, t_j - наработка до первого отказа каждого из объектов.

Среднее время безотказной работы и *среднюю наработку до отказа* можно получить по результатам испытаний. Для этого нужно проводить испытания до тех пор, пока не откажет последний из элементов.

Формула (9.3) соответствует плану испытаний, при котором все объекты испытываются до отказа.

Пусть *время жизни* каждого из элементов соответственно равно $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$. Тогда средняя наработка до отказа:

$$T_0 = \frac{\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\tau_i$$

Так как практически невозможно осуществить испытания всех элементов до отказа, то при большом значении *n* среднюю наработку до отказа можно определить по формуле

$$T_i \approx \frac{\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n + (N-n)t}{N}, \tag{9.4}$$

где n – число отказавших элементов, N – число элементов, поставленных на испытания; *время жизни* каждого из элементов соответственно равно $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$.

*

Пример 9.1. На испытания поставлено N =100 элементов. Испытания проводились в течение t = 200 ч. В процессе проведения испытаний отказало n = 5 элементов, при этом отказы зафиксированы в следующие моменты: τ_1 = 50 ч; τ_2 = 80 ч; τ_3 = 90 ч; τ_4 = 100 ч; τ_5 = 150 ч; остальные элементы не отказали. Определить среднюю наработку до отказа T_O.

Решение. Для решения задачи воспользуемся формулой (9.4)

$$T_i = [(50 + 80 + 90 + 100 + 150) + (100 - 5)200]/100 = 194{,}7 \text{ ч.}$$

*

При отсутствии данных об отказах элементов, но известном распределении ресурса для таких элементов (это возможно при известных закономерностях изнашивания элементов), среднюю наработку до отказа элемента (T_i) за период эксплуатации изделия между ремонтами, T_p, во время которых производится его замена или восстановление, следует определять по формуле (ч):

$$T_i = \frac{T_p}{\ln\dfrac{1}{P(T_p)}},$$

где $P(T_p)$ – вероятность безотказной работы элемента за наработку T_p.

Эта формула дает нижнюю оценку T_i , т.е с некоторым запасом.

При отсутствии данных об элементах их средняя наработка до отказа может быть определена ориентировочно по справочным данным с использованием зависимости T_i = $1/l_i$, ч. (здесь l_i – интенсивность отказов, принимаемая по соответствующей табл. РД РТМ 26-01-136-81).

Средняя наработка на отказ – отношение суммарной наработки восстанавливаемого объекта к математическому ожиданию числа его отказов в течение этой наработки.

Этот показатель введен применительно к восстанавливаемым объектам, при эксплуатации которых допускаются многократно повторяющиеся отказы. Эксплуатация таких объектов может быть описана следующим образом: в начальный момент времени объект начинает работать и работает до первого отказа; после отказа происходит восстановление работоспособности, и объект вновь работает до отказа и т. д.

В соответствии с РД РТМ 26-01-136-81 среднюю наработку на отказ определяют по следующей формуле

$$T_O = \frac{t}{M\{r(t)\}} \ . \tag{9.5}$$

Здесь t – суммарная наработка, $r(t)$ – число отказов, наступивших в течение этой наработки, $M\{r(t)\}$ – математическое ожидание этого числа.

В общем случае средняя наработка на отказ оказывается функцией t. Для стационарных потоков отказов средняя наработка на отказ от t не зависит.

Для восстанавливаемого элемента с*редняя наработка на отказ – это* наработка, приходящаяся, в среднем, на один отказ в рассматриваемом интервале суммарной наработки или определенной продолжительности эксплуатации:

$$T_O = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m} t_i \ , \tag{9.6}$$

где t_i – наработка элемента до i-го отказа; m – количество отказов в рассматриваемом интервале суммарной наработки.

Наработка между отказами определяется объемом работы элемента от i-го отказа до (i + 1)-го, где i =1, 2,..., m.

Среднее время восстановления одного отказа в рассматриваемом интервале суммарной наработки или определенной продолжительности эксплуатации

$$T_B = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m} t_{Bi} \tag{9.7}$$

где t_{Bi} – время восстановления i-го отказа; m – число отказов в рассматриваемом интервале суммарной наработки.

Коэффициент готовности Кг представляет собой вероятность того, что изделие будет работоспособно в произвольный момент времени, кроме периодов выполнения планового технического обслуживания, когда применение изделия по назначению исключено. Этот показатель является **комплексным**, так как он количественно характеризует одновременно два показателя: безотказность и ремонтопригодность.

В стационарном (установившемся) режиме эксплуатации и при любом виде закона распределения времени работы между отказами и времени восстановления коэффициент готовности определяют по формуле

$$K_г = T_O/(T_O + T_B) \tag{9.8}$$

где T_O – средняя наработка на отказ; T_B – среднее время восстановления одного отказа.

Из анализа этой формулы вытекает, что надежность изделия является функцией не только безотказности, но и ремонтопригодности. Это означает, что низкая надежность может быть несколько компенсирована улучшением ремонтопригодности. Чем выше интенсивность восстановления, тем выше готовность изделия. Если время простоя велико, то готовность будет низкой.

*

Пример 9.2. Определить коэффициент готовности системы, если известно, что среднее время восстановления одного отказа равно T_B = 5 ч, а среднее значение наработки на отказ составляет T_O = 500 ч.

Решение. Для определения коэффициента готовности воспользуемся формулой (9.8)

$$K_г = T_O/(T_O + T_B) = 500/(500 + 5) = 0{,}99.$$

*

Еще одной важной характеристикой ремонтопригодности является **коэффициент технического использования $K_{ти}$**, который представляет собой отношение наработки изделия в единицах времени за некоторый период эксплуатации к сумме этой наработки и времени всех простоев, обусловленных устранением отказов, техническим обслуживанием и ремонтами за этот период.

Коэффициент технического использования представляет собой вероятность того, что изделие будет работать в надлежащем режиме за время T. Таким образом, $K_{ти}$ определяется двумя основными факторами – надежностью и ремонтопригодностью и характеризует долю времени нахождения элемента в работоспособном состоянии относительно рассматриваемой продолжительности эксплуатации.

Период эксплуатации, для которого определяется коэффициент технического использования, должен содержать все виды технического обслуживания и ремонтов. Коэффициент технического использования учитывает затраты времени на плановые и неплановые ремонты, а также регламенты, и определяется по формуле

$$K_{ти} = t_H/(t_H + t_B + t_P + t_O), \qquad (9.9)$$

где t_H – суммарная наработка изделия в рассматриваемый промежуток времени; t_B, t_P и t_O – соответственно суммарное время, затраченное на восстановление, ремонт и техническое обслуживание изделия за тот же период времени.

*

Пример 9.3. Определить коэффициент технического использования машины, если известно, что машину эксплуатируют в течение года ($T_Э$ = 8760 ч). За этот период эксплуатации машины суммарное время восстановления отказов составило t_B = 40 ч. Время проведения регламента составляет t_O = 20 ч. Суммарное время, затраченное на ремонтные работы за период эксплуатации составляет 15 суток, т.е. $t_P = 15 \cdot 24 = 360$ ч.

Решение. Коэффициент технического использования вычислим по формуле (9.9), но сначала определим суммарное время наработки машины:

$$t_H = T_Э - (t_B + t_P + t_O) = 8760 - (40 + 360 + 20) = 8340 \text{ ч.}$$

$$K_{ти} = t_H/(t_H + t_B + t_P + t_O) = t_H / T_Э = 8340/8760 = 0{,}952.$$

Пример 9.4. При эксплуатации сложной технической системы получены следующие статистические данные (табл. 9.2). Определить коэффициент готовности системы.

Таблица 9.2

Статистические данные, полученные при эксплуатации сложной технической системы (к примеру 9.4)

Номер элемента системы	Количество отказов m_i	Время, ч		
		восстановление отказа t_{Bi}	работы t_P	суммарное восстановление $m_i\, t_{Bi}$
1	2	1	200	2
2	5	2	300	10
3	6	4	400	24
4	4	3	300	12
5	8	2	600	16
6	10	5	700	50
7	15	2	900	30
8	20	3	1000	60
Всего	70		4400	204

Наработка на отказ

$$T_0 = \sum_{i=1}^{8} t_P / \sum_{i=1}^{8} m_i = 4400/70 = 62{,}8 \quad ч\,.$$

Среднее время восстановления

$$T_B = \sum_{i=1}^{8} m_i t_{Bi} / \sum_{i=1}^{8} m_i = 204/70 = 2{,}9 \quad ч$$

По формуле (9.8) по вычисленным значениям T_O и T_B находим коэффициент готовности системы:

$$K_г = 62{,}8/(62{,}8 + 2{,}9) = 0{,}95.$$

*

Правомерность использования при расчете надежности «точечной» оценки или произвольного закона распределения времени безотказной работы и времени восстановления можно обосновать следующими результатами работ в этой области.

Отдельные детали изделия могут характеризоваться различными законами распределения времени безотказной работы и времени восстановления. Однако получить эксплуатационную информацию в объеме, необходимом для определения закона распределения, практически оказалось не реальным.

Основные причины такого положения следующие: для химического машиностроения характерно единичное или мелкосерийное производство изделий; даже при серийном выпуске изделий они работают в различных условиях, а следовательно эксплуатационные данные являются неоднородными и не могут быть представлены с точки зрения статистики в виде единой совокупности (или выборки из нее); влияние на вид закона распределения таких факторов как технологии изготовления, изменения материалов, особенностей эксплуатации и ремонта. Поэтому оценку надежности деталей (узлов) изделия не целесообразно связывать с видом функции распределения ресурсов или отказов, чтобы избежать возможных ошибок при выборе вида распределения. Повышение точности оценки значений показателей надёжности элементов может быть достигнуто за счёт числа опытных данных и их «инженерной достоверности».

9.3 Выбор и обоснование показателей

Одной из важнейших задач на этапе **проектирования** является правильный выбор номенклатуры нормируемых показателей надежности. Необоснованный выбор показателей надежности из широкой номенклатуры имеющихся показателей может привести к неправильным решениям при проектировании системы.

Информация о назначении системы дает возможность определить область и интенсивность применения системы по назначению. Сведения об условиях и режимах работы системы используют для оценки влияния факторов окружающей среды на работоспособность проектируемой системы, а также влияния действующих внешних и внутренних нагрузок на несущую способность элементов системы. Количественные значения этих оценок являются исходными данными для расчета прочности и устойчивости элементов и узлов металлоконструкций.

Если по условиям применения систему предполагается ремонтировать в условиях эксплуатации, то в качестве одного из основных показателей надежности следует выбирать коэффициент готовности $K_Г$ или коэффициент технического использования $K_{ТИ}$.

В случае, если отказ системы или отдельных ее элементов приводит к невыполнению важной задачи или нарушает безопасность работы обслуживающего персонала, а также вызывает угрозу для здоровья и жизни людей, находящихся в зоне действия системы, то для таких систем основным показателем надежности является безотказность, выражающаяся в виде наработки на отказ или вероятности безотказной работы.

Если в результате простоя системы после отказа возникают большие материальные затраты, то такая система должна иметь хорошую ремонтопригодность и высокие показатели безотказности.

Если система по условиям эксплуатации подлежит длительному хранению (ожиданию работы) или она должна транспортироваться на специальных транспортных средствах, то такая система должна обладать высокими показателями сохраняемое в соответствующих условиях хранения и транспортирования.

Все показатели надежности проектируемой системы должны обеспечивать нормальное ее функционирование в течение заданного срока эксплуатации.

9.4 Распределение нормируемых показателей надежности

Распределение норм надежности проводят на этапах эскизного и рабочего проектирования технической системы. Предполагается, что на любом из этих этапов конструирования систему можно разбить на некоторое число подсистем в виде отдельных сборочных единиц и исходить из начальной надежности каждой подсистемы, полученной расчетом или по результатам испытаний подсистем.

Пусть p_1, p_2, ... ,p_n означают надежность подсистем. Если предположить, что отказ любой подсистемы приводит к отказу системы в целом, то надежность системы на основании теоремы умножения вероятностей определяется выражением:

$$P = p_1\, p_2 ... p_n \tag{9.10}$$

При проектировании задаются требуемым уровнем надежности системы P^{TP}. Задача состоит в том, чтобы повысить хотя бы одно из значений **p**, на столько, чтобы $P > P^{TP}$.

Для повышения надежности необходимо произвести дополнительные затраты, связанные либо с введением резервирования в этой системе, либо с введением в систему более надежных элементов.

Одна из методик повышения надежности P до требуемого значения P^{TP} сводится к следующему. Надежности $p_1, p_2,\dots, p_n$ располагают в неубывающей последовательности:

$$p_1 \le p_2 \le \dots \le p_n. \tag{9.11}$$

Каждую из надежностей $p_1, p_2,\dots, p_k$ увеличивают до одного и того же значения p_0^{TP}, а надежности, начиная с $p_{k+1},\dots, p_n$, остаются неизменяемыми. Номер k выбирают из максимального значения j, для которого

$$p_j < \left[P^{TP} / \prod_{j=1}^{n+1} p_j \right]^{1/j} = r_j \quad , \tag{9.12}$$

где $p_{n+1} = 1$ по определению.

Значение $p^{TP}{}_0$ определяют из соотношения

$$p_0^{TP} = \left[P^{TP} / \prod_{j=k+1}^{n+1} p_j \right]^{1/k} . \tag{9.13}$$

Очевидно, что надежность системы после определения p_0^{TP} будет удовлетворять заданному требованию, поскольку новая надежность равна:

$$\left(p_0^{TP}\right)^k p_{k+1} \dots p_n = \left(p_0^{TP}\right)^k \prod_{j=k+1}^{n+1} p_j = P^{TP} . \tag{9.14}$$

*

Пример 9.5. Пусть техническая система состоит из трех подсистем. Надежность каждой из них соответственно равна: $p_1 = 0{,}7$; $p_2 = 0{,}8$; $p_3 = 0{,}9$. Известно, что отказ любой одной подсистемы приводит к отказу системы в целом. Требуемое значение надежности системы равно $P^{TP} = 0{,}65$.

Провести перераспределение норм надежности таким образом, чтобы произведение вероятностей трех подсистем соответствовало заданному требованию.

Решение. Используя формулу (9.10), получим:

$$P = p_1\, p_2\, p_3 = 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}504.$$

Предположим, что мы не рассчитываем k по формуле (9.12), а произвольно задаем $k = 1$. Тогда, подставляя исходные данные в формулу (9.13), получим:

$$p^{TP}{}_0 = [0{,}65/0{,}8 \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}0]^{1/1} = 0{,}903.$$

$$P = 0{,}903 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}65.$$

Полученное значение надежности соответствует требуемому $P^{TP} = 0{,}65$.

Однако на основании полученного значения $p^{TP}{}_0$ можно заключить, что распределение средств, необходимых для повышения надежности, не было оптимальным. Другими словами, приложено больше средств для достижения заданного показателя, чем требовалось.

Определим теперь k по формуле (9.12). С этой целью вычислим три величины:

$$r_1 = [P^{TP}/p_2p_3 \cdot 1{,}0]^{1/1} = [0{,}65/0{,}8 \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}0]^{1/1} = 0{,}903;$$
$$r_2 = [P^{TP}/p_3 \cdot 1{,}0]^{1/2} = [0{,}65/0{,}9 \cdot 1{,}0]^{1/2} = 0{,}85;$$
$$r_3 = [P^{TP}/1{,}0]^{1/3} = [0{,}65/1{,}0]^{1/3} = 0{,}866.$$

Так как $p_1 < r_1$, $p_2 < r_2$, $p_3 > r_3$, примем $k = 2$. В этом случае наибольшее значение индекса j со свойством $p < r$, равно двум. Далее, учитывая выражение (9.13), находим

$$p^{TP}{}_0 = [0{,}65/0{,}9]^{1/2} = 0{,}85.$$

Это означает, что средства на повышение надежности необходимо распределить следующим образом: надежность подсистемы №1 увеличивают с 0,7 до 0,85; надежность подсистемы №2 – с 0,8 до 0,85; надежность подсистемы №3 оставляют на прежнем уровне. В результате вероятность безотказной работы всей системы:

$$P = (0{,}85)^2\,0{,}90 = 0{,}65.$$

*

Номенклатура нормируемых показателей надежности для многих видов технических объектов приведена в государственных и отраслевых стандартах, технических условиях и других нормативно-технических документах. Например, в ГОСТ 4.113–84 в качестве основных показателей для химического оборудования установлены наработка на отказ, установленный ресурс до капитального ремонта и установленный срок службы.

В соответствии с ГОСТ 27.003–90 номенклатура показателей надежности выбирается на основе следующих основных классификационных признаков:

– определенность назначения изделия (общего или конкретного назначения);
– число возможных (учитываемых) состояний по работоспособности при эксплуатации (наличие частично неработоспособных состояний);
– режим применения или функционирования;
– возможные последствия отказов или достижения предельного состояния при применении или хранении и транспортировании;
– возможность восстановления;
– характер процессов, определяющих переход в предельное состояние;
– возможность и способ восстановления ресурса или срока службы;
– возможность и необходимость технического обслуживания;
– возможность и необходимость контроля перед применением;
– наличие в составе средств вычислительной техники.

Если рассматривать полную программу обеспечения надежности при проектировании, то она должна включать следующие этапы:

1 Постановка задачи.

2 Определение конструктивных параметров.

3 Анализ характера, последствий и важности отказов.

4 Проверка правильности выбора наиболее важного конструктивного параметра.

5 Формулировка соотношения между критическими параметрами и критериями, определяющими появление отказа.

6 Расчет напряжения, определяющего появление отказа.

7 Выбор распределения напряжения, определяющего появление отказа.

8 Расчет прочности, определяющей появление отказа.

9 Выбор распределения прочности, определяющей появление отказа.

10 Расчет показателей надежности, связанных с этими распределениями, определяющими появление отказа, для каждого критического вида отказа.

11 Повторный цикл проектирования для обеспечения заданной надежности.

12 Оптимизация конструкции с точки зрения рабочих характеристик, стоимости, веса и т.д.

13 Повторный цикл оптимизации для каждого ответственного элемента системы.

14 Расчет показателей надежности системы.

15 Повторение всех этапов с целью оптимизаций надежности системы.

9.5 Общие положения к обеспечению повышения надежности. Виды надежности

При исследовании надежности сложных химико-технологических объектов или систем можно выделить следующие виды надежности:

– проектно-расчетную надежность (или надежность проектных решений);

– конструкционную надежность;

– эксплуатационную надежность;

– надежность автоматизированных систем управления технологическими процессами (АСУ-ТП);

– надежность технологической топологии.

Проектно-расчетная надежность, или надежность проектных решений, системы зависит от двух факторов: от правильного выбора модели процесса ее функционирования и от точности исходных данных о конструкционных и технологических параметрах ее элементов.

Конструкционная надежность – это надежность системы в зависимости от качества конструкционных материалов, принятых для изготовления ее элементов (трубопроводов, арматуры, клапанов и т. п.). Конструкционную надежность определяют сроками межремонтного пробега элементов без простоев, без утечек жидкости и без выделений газа через неплотности в соединениях, без коррозии элементов.

Эксплуатационная надежность – надежность системы, зависящая от качества монтажа, эксплуатации и ремонта элементов, а также хранения резервных элементов до пуска их в работу.

Надежность АСУ-ТП – надежность системы, определяемая качеством работы контрольно-измерительных приборов и регуляторов, зависящая от правильности выбора каналов управления и принятой блок-схемы алгоритмов управления.

Надежность технологической топологии – это надежность системы, которая зависит от структуры технологических связей ее элементов и позволяет оценивать надежность производства уже на стадии проектирования. Анализ надежности технологической топологии объекта состоит в нахождении скрытых структурных недостатков в технологической схеме системы и в определении минимального множества элементов, отказ которых приводит к отказу системы в целом, т. е. в определении элементов, являющихся «узкими» местами системы (наиболее нагруженных технологическими связями), с целью выбора их оптимальной структуры.

В целях создания работоспособных и высоконадежных химико-технологических объектов (систем) на каждой стадии применяются соответствующие методы обеспечения и повышения надежности.

На стадии проектирования – это выбор (или разработка) высоконадежных узлов, составных частей элементов и систем, рациональных конструктивных и технологических схем, оптимальных режимов, номенклатуры нормируемых показателей надежности, использование научно обоснованных методик расчета надежности и прогнозирования ресурса с учетом всех возможных условий эксплуатации, внутренних процессов и внешних воздействий.

Конструкционную надежность объекта можно повысить за счет:

– совершенствования кинематических схем аппаратов и конструкции элементов, оптимизации конструктивных решений, разработки надежной и прогрессивной технологии их сборки и монтажа;

– применения стандартизированного типового оборудования, унификации узлов и единиц оборудования;

– применения высококачественных конструкционных материалов для изготовления оборудования и новых технологий упрочнения;

– увеличения запаса прочности узлов и деталей;

– предусмотрения удобства подхода к оборудованию для обслуживания и ремонта;

– защиты оборудования от износа, усталости материалов, коррозии, эрозии и других воздействий внешней окружающей среды.

На стадии изготовления – это контроль качества сырья, материалов и комплектующих, автоматизация и роботомеханизация процессов изготовления узлов и единиц оборудования, организация рациональных технологических процессов, применение упрочняющих технологий, отработка системы контрольных и приемо-сдаточных испытаний.

Эксплуатационную надежность объекта повышают за счет:

– разработки рациональных способов и условий хранения технологических элементов до эксплуатации;

– стабилизации параметров технологических режимов;

– снижения уровня нагрузок и воздействий;

– разработки инструкций по монтажу, эксплуатации, ремонту аппаратов и оборудования;

– повышения качества сборки, монтажа и восстановления элементов;

– устранения скрытых дефектов на стадии пуска и приработки;

– проведения предварительных испытаний элементов;

– оптимального планирования сроков проведения технического обслуживания (ремонта) элементов и систем.

Надежность АСУ объектом может быть повышена за счет применения высоконадежных датчиков, контрольно-измерительных и регулирующих приборов, путем оптимального выбора управляющих переменных и структуры блок-схем (алгоритмов автоматического управления) для АСУ.

Надежность технологической топологии системы повышают либо путем изменения структуры технологических связей, либо путем ввода резервных технологических связей и резерва для элементов, являющихся ее «узкими» местами. Для этих элементов также необходимо обеспечить повышение их конструкционной или физической надежности уже на стадии монтажа с оптимальной организацией и контролем качества монтажных работ, т. к. это обеспечит повышение эксплуатационной надежности объекта в целом.

Для повышения надежности объектов химического машиностроения в первую очередь необходимо проанализировать возможность повышения надежности ее элементов, причем эффект будет тем значительнее, чем сложнее система и чем больше в ней элементов. Однако чаще всего более надежные элементы имеют большие габариты и массу, более сложную собственную структуру и более высокую стоимость. Кроме того, осуществление некоторых методов повышения надежности элементов часто требует проведения сложных конструктивных, технологических, эксплуатационных и организационных мероприятий, поэтому в каждом конкретном случае необходимо соотнести полезный эффект от повышения надежности элемента с затратами на ее осуществление.

Для ряда систем возможно повышение надежности за счет сокращения числа элементов. Например, для системы с последовательным соединение 10 элементов при p = 0,99 уменьшение числа элементов в 2 раза уменьшает вероятность ее отказа с 9,6 % до 4,9 %. Однако перестройка технологической системы, как правило, означает изменение ее функциональной и конструктивной схемы (за исключением структурного резервирования) и применяется крайне редко.

При заданной конструкции элементов системы возможности повышения их безотказности весьма ограниченны. В этих условиях основным наиболее распространенным способом повышения надежности химико-технологической системы (установки, технологической линии) уже на стадии проектирования является **структурное резервирование** отдельных ее элементов, надежность которых будет определяющей для всей системы.

Вопросы для самоконтроля.

1. Дайте определение показателя надежности. Единичные и комплексные показатели.
2. Перечислите основные исходные данные для расчета надежности. Дайте определение и порядок расчет наработки до отказа и на отказ.
3. Дайте определение и характеристику комплексных показателей надежности.
4. Обоснуйте выбор показателей надежности и приведите порядок определения уровня надежности системы.
5. Перечислите основные виды надежности и охарактеризуйте их.

10 РЕЗЕРВИРОВАНИЕ КАК СПОСОБ ПОВЫШЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ

Резервирование – это одно из основных средств обеспечения заданного уровня надежности (особенно безотказности) объекта при недостаточно надежных элементах.

Резервирование – это применение дополнительных средств и (или) возможностей с целью сохранения работоспособного состояния объекта при отказе одного или нескольких элементов.

Т.о. – это метод повышения надежности объекта путем введения *избыточности*. В свою очередь избыточность – это дополнительные средства и (или) возможности сверхминимально необходимые для выполнения объектом заданных функций. Задачей введения избыточности является обеспечение нормального функционирования объекта после возникновения отказа в его элементах.

10.1 Классификация методов резервирования

По виду резервирования принята следующая классификация методов резервирования (рис. 10.1).

Структурное (аппаратурное, элементное, схемное) предусматривает применение резервных элементов структуры объекта. Суть структурного резервирования заключается в том, что в минимально необходимый вариант объекта вводятся дополнительные элементы.

Элементы в структурной схеме разделяют на **основные** (элемент, необходимый для выполнения объектом требуемых функций при отсутствии отказов его элементов и **резервные** (элемент, предназначенный для выполнения функций основного элемента в случае отказа последнего). Определение основного элемента не связано с понятием минимальности основной структуры объекта, поскольку элемент, являющийся основным в одних режимах эксплуатации, может служить резервным в других условиях. Резервируемый элемент – основной элемент, на случай отказа которого в объекте предусмотрен резервный элемент.

Временно́е резервирование связанно с использованием резерв времени. При этом предполагается, что на выполнение объектом необходимой работы отводиться время, заведомо большее минимально необходимого. Резервы времени могут создаваться за счет повышения производительности объекта, инерционности его элементов и т.д. Для объектов химического машиностроения такой вид резервирования реализуется с использованием следующих приемов и операций:

1) увеличение в условиях эксплуатации расчетного времени функционирования, необходимого для выполнения поставленной цели или для выпуска заданного количества химической продукции;
2) аппараты и машины разрабатываются на бо́льшее значение производительности, чем это требуется по расчету, и, следовательно, объекты могут выполнять задание за более короткий промежуток времени, чем это установлено планом;
3) ввод в структуру технологической схемы промежуточных емкостей (резервуаров и бункеров для накопления продукта) между отдельными аппаратами производства. Этот прием создает условия, позволяющие продолжать функционирование технологической схемы, даже, если часть оборудования до промежуточного резервуара или бункера остановлена. Подобную функцию выполняют, также, газгольдеры, склады и т.д.;
4) функциональная инерционность объектов, например тепловая инерционность

печей, обусловленная массивами футеровки, предотвращает быстрое снижение температуры печи при перерыве в подаче горючего. Инерционность объектов позволяет за малый возможный промежуток времени ликвидировать аварию, переключив процесс на какой-либо резервный объект или выполнив какие-либо другие операции.

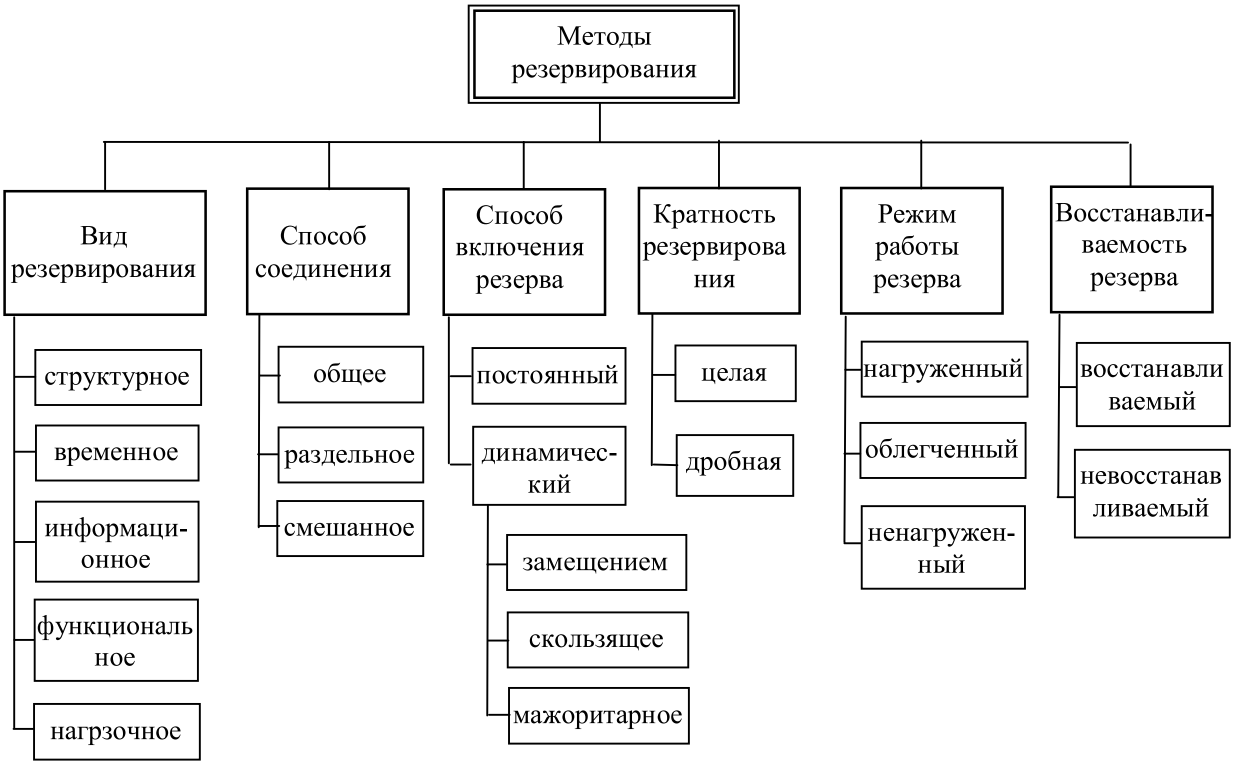


Рисунок 10.1 – Классификация методов резервирования

Информационное резервирование – это резервирование с применением избыточности информации. Примерами информационного резервирования являются многократная передача одного и того же сообщения по каналу связи; применение при передаче информации по каналам связи различных кодов, обнаруживающих и исправляющих ошибки, которые появляются в результате отказов аппаратуры и влияния помех; введение избыточных информационных символов при обработке, передаче и отображении информации. Избыток информации позволяет компенсировать искажения передаваемой информации или устранять их.

Функциональное резервирование – резервирование, при котором заданная функция может выполняться различными способами и техническими средствами.

Например, для изготовления детали используется группа станков, каждый из которых может выполнять одну из последовательных операций обработки. Функциональным резервированием будет в этом случае введение в технологическую линию универсального или многооперационного станка. В качестве другого примера можно привести создание конструкционно совмещенных реакционно-массообменных процессов, протекающих в одном аппарате химической технологии. К функциональному резервированию относится и производственно-избыточная избыточность (например, изготовление изделий с повышенным классом точности), часто используемая для обеспечения и повышения надежности объектов химического машиностроения. При этом создаются условия для увеличения надежности и долговечности, поскольку сначала в процессе функционирования объект изнашивается до традиционного класса точности, а затем уже идет обычный процесс изнашивания.

Нагрузочное (или режимное) резервирование – резервирование с применением нагрузочных резервов – предусматривает использование способности объекта воспринимать дополнительные, или избыточные, нагрузки. В химическом машиностроении его реализуют путем введения коэффициентов запаса прочности, снижения допустимых режимных параметров функционирования (давление, частоту вращения).

Резервирование в химической промышленности широко используют для повышения надежности систем энергоснабжения (электро-, тепло-, водоснабжения), резервируются устройства, обеспечивающие безопасность протекания процесса (устанавливают несколько предохранительных клапанов на один резервуар высокого давления).

Резервирование позволяет создавать объекты, надежность которых выше, чем надежность составляющих их элементов, однако возможности применения резервирования ограниченны из-за увеличения массы и производственной площади системы и из-за повышения стоимости единицы продукта по сравнению с нерезервированной. Это приводит к задаче выбора оптимального способа резервирования и оптимального числа резервных элементов.

Для анализа структурной надежности технических систем интерес представляет **структурное резервирование** – введение в структуру объекта дополнительных элементов, выполняющих функции основных элементов в случае их отказа.

10.2 Способы структурного резервирования и виды резерва

Классификация различных способов структурного резервирования осуществляется по следующим признакам:

1) *по схеме включения резерва*:

- **общее** резервирование, при котором резервируется объект в целом;
- **раздельное** резервирование, при котором резервируются отдельные элементы или их группы;
- **смешанное** резервирование, при котором различные виды резервирования сочетаются в одном объекте;

2) *по способу включения резерва*:

- **постоянное** резервирование, без перестройки структуры объекта при возникновении отказа его элемента;
- **динамическое** резервирование, при котором при отказе элемента происходит перестройка структуры схемы. В свою очередь динамическое подразделяется на:

а) резервирование замещением, при котором функции основного элемента передаются резервному только после отказа основного;

б) скользящее резервирование, при котором несколько основных элементов резервируется одним или несколькими резервными, каждый из которых может заменить любой основной (те. группы основных и резервных элементов идентичны).

3) *по режиму работы резерва*:

- нагруженное резервирование, при котором резервные элементы (или один из них) находятся в режиме основного элемента;
- облегченное резервирование, при котором резервные элементы (по крайней мере один из них) находятся в менее нагруженном режиме по сравнению с основными;
- ненагруженное резервирование, при котором резервные элементы до начала

выполнения ими функций находятся в ненагруженном режиме.

4) по условиям восстановления работоспособности в процессе эксплуатации:

- резервирование с восстановлением;
- резервирование без восстановления.

Основной характеристикой структурного резервирования является кратность резервирования – отношение числа резервных элементов к числу резервируемых (основных) элементов. Резервирование может быть с целой и дробной кратностью (типа 2:3; 4:2 и т.д.).

Резервирование одного основного элемента одним резервным (т.е. с кратностью 1:1) называется **дублированием**.

При резервировании с дробной кратностью нормальная работа резервированного соединения возможна при условии, когда число исправных элементов не меньше необходимого для нормальной работы. При резервировании с дробной кратностью один резервный элемент системы приходится на два или более основных элементов. К резервированию с дробной кратностью относится также резервирование со скользящим (плавающим) резервом.

В химическом машиностроении надежность невосстанавливаемых резервируемых аппаратов и технологических линий, как правило, повышают за счет:

– общего и раздельного резервирования с постоянно включенным резервом;

– общего и раздельного резервирования способом замещения;

– резервирования системы со скользящим (плавающим) резервом.

Использование же такого вида структурного резервирования как скользящее возможно лишь при наличии специального диагностического устройства, позволяющего отыскать неисправный элемент и подключить вместо него резервный. При этом, резервные элементы должны быть однотипными. Однако, такой вид резервирования дает наибольший выигрыш надежности.

Количественно повышение надежности системы в результате резервирования или применения высоконадежных элементов можно оценить по коэффициенту выигрыша надежности, определяемому как отношение показателя надежности до и после преобразования системы

Структурная схема резервной группы, состоящей из одного основного и m резервных элементов, представлена на рис. 10.2.

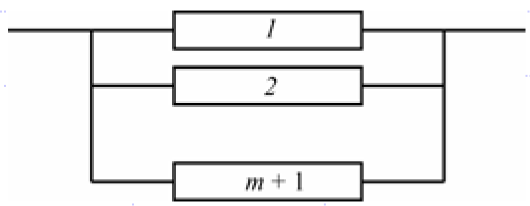


Рисунок 10.2 – Структурная схема системы из одного основного и m резервных элементов

Если дана система с постоянно включенным резервом, состоящая из двух параллельно работающих элементов (рис. 10.2, $m = 1$) с вероятностью безотказной работы основного элемента p_1, резервного – p_2, то вероятность безотказной работы такой системы равна

$$P(t) = 1 - (1 - p_1(t))\,(1 - p_2(t))$$

В случае равнонадежных элементов:

$$P(t) = 1 - (1 - p_1(t))^2 = 2p_1 - p_1^2 = p_1(2 - p_1). \qquad (10.1)$$

Для экспоненциального распределения отказов каждого из двух параллельно работающих элементов $p_1(t) = p_2(t) = \exp(-\lambda t)$ с учетом (10.1) вероятность безотказной работы системы определяется как $P(t) = 2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}$.

Поскольку среднее время безотказной работы одного нерезервируемого элемента равно:

$$T_{cp}^{(1)} = \int_0^\infty p(t)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda},$$

среднее время безотказной работы системы будет:

$$T_{cp}^{(2)} = \int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty \left(2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}\right)dt = \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2\lambda}.$$

Тогда выигрыш надежности для системы, состоящей из двух параллельно работающих элементов, по сравнению с одним нерезервируемым элементом равен:

$$W_T^{(1)} = \frac{T_{cp}^{(2)}}{T_{cp}^{(1)}} = \frac{3}{2}.$$

Вероятность безотказной работы системы, состоящей из одного основного и m резервных неравнонадежных элементов (рис. 10.2), определяется по формуле:

$$P(t) = 1 - \prod_{i=1}^{m+1}\left(1 - p_i(t)\right).$$

В случае равнонадежных элементов эта формула примет вид:

$$P(t) = 1 - (1 - p_1(t))^{m+1}. \qquad (10.2)$$

Для экспоненциального распределения вероятности безотказной работы элементов, т. е. $p(t) = e^{-\lambda t}$, получаем:

$$P(t) = 1 - [1 - e^{-\lambda_i t}]^{m+1}. \qquad (10.3)$$

При малых t $\left(t \langle\langle \frac{1}{\lambda_i}\right)$ справедлива простая оценка снизу:

$$\underline{P(t)} \approx 1 - t^{m+1} \prod_{1 \le i \le (m+1)} \lambda_i,$$

где i – интенсивность отказов i-го элемента.

При идентичных элементах предыдущая формула принимает вид:

$$\underline{P(t)} \approx 1-(\lambda t)^{m+1}. \tag{10.4}$$

Выигрыш надежности $W_T^{(2)}$ по среднему времени безотказной работы системы, состоящей из (m + 1) параллельно работающих равнонадежных элементов, по сравнению со средним временем безотказной работы одного нерезервируемого элемента при условии, что закон распределения вероятности безотказной работы каждого элемента экспоненциальный, равен:

$$W_T^{(2)} = \frac{\int\limits_0^\infty \left[1-\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{m+1}\right]dt}{\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}dt} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m+1}\frac{1}{i\lambda}}{\frac{1}{\lambda}} = \sum_{i=1}^{m+1}\frac{1}{i}. \tag{10.5}$$

Средняя наработка до отказа системы T (рис. 10.2) в общем случае может быть найдена только численным интегрированием по формуле

$$T = \int\limits_0^\infty P dt = \int\limits_0^\infty \left\{1-\left[1-e^{-\lambda t}\right]^n\right\}dt. \tag{10.6}$$

Для идентичных элементов средняя наработка до отказа при вероятности безотказной работы элементов $p(t) = \exp(-\lambda t)$ с учетом

$$T = \frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i},$$

определяется как:

$$T = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k} = t\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k}. \tag{10.7}$$

При больших значениях m :

$$T \approx \frac{1}{\lambda}\left[C+\ln(m+1)+(2m+2)^{-1}\right]. \tag{10.8}$$

10.2.1 По схеме включения резерва при **общем резервировании** резервируется объект в целом. При **раздельном резервировании** резервируются отдельные элементы (подсистемы) объекта или их группы.

Примерами общего резервирования (рис. 10.3, а) являются резервные технологические линии или агрегаты большой единичной мощности. При раздельном резервировании (рис. 10.3, б) резервируют отдельные элементы объекта.

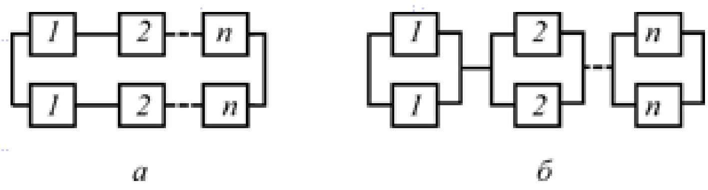


Рисунок 10.3 – Схемы резервирования системы, состоящей из n основных элементов: а) общего резервирования с постоянно включенным резервом (число резервных цепей m = 1); б) раздельного (поэлементного) дублирования с постоянно включенным резервом

Для системы с последовательным соединением n элементов при общем резервировании (дублировании) (рис. 10.3, а) вероятность безотказной работы равна:

$$P^{(1)} = 1 - (1 - P)^2 = 1 - \left(1 - \prod_{i=1}^{n} p_i\right)^2 = P(2 - P). \tag{10.9}$$

При раздельном резервировании (дублировании) (рис. 10.3, б):

$$P^{(2)} = \prod_{i=1}^{n}\left(1 - (1 - p_i)^2\right) = \prod_{i=1}^{n} p_i(2 - p_i) = P\prod_{i=1}^{n}(2 - p_i). \tag{10.10}$$

Коэффициенты выигрыша надежности системы по вероятности безотказной работы для этих двух случаев соответственно равны:

$$G_p^{/} = \frac{P^{(1)}}{P} = 2 - P; \qquad G_p^{//} = \frac{P^{(2)}}{P} = \prod_{i=1}^{n}(2 - p_i). \tag{10.11}$$

Отсюда следует, что раздельное резервирование эффективнее общего: например, для системы из трех одинаковых элементов (n = 3) при p = 0,9

$P = 0{,}9^3 = 0{,}729$;

$P^{(1)} = 0{,}729(2 - 0{,}729) = 0{,}9266$,

$P^{(2)} = 0{,}729(2 - 0{,}9) = 0{,}9703$.

Тогда: $G_p^{(1)} = 1{,}27$; $G_p^{(2)} = 1{,}33$.

Раздельное резервирование при прочих равных условиях дает больший выигрыш в надежности, чем общее. Раздельное резервирование особенно выгодно при большом числе элементов в системе и при увеличении кратности резервирования.

Вероятность отказа системы, состоящей из n элементов (одного основного и (n – 1) резервного), без учета надежности переключателей рассчитывается по формуле:

$$Q = q_1 \ldots q_n = \prod_{i=1}^{n} q_i = \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i). \tag{10.12}$$

Система с последовательным соединением n элементов с общим резервированием (m резервных цепей) будет нормально функционировать при сохранении работоспособности хотя бы одной из них.

Для схемы общего резервирования с постоянно включенным резервом вероятность безотказной работы системы равна (элементы равнонадежны, вероятность безотказной работы каждого элемента равна $p(t)$) (рис. 10.4):

$$P_{общ} = 1 - Q_{общ} = 1 - \prod_{i=1}^{m+1}\left(1 - p_i\right). \qquad (10.13)$$

В свою очередь безотказная работа i-й цепи (i = 1, ..., m) будет иметь место при безотказной работе каждого из n элементов. Тогда:

$$P_{общ} = 1 - \prod_{i=1}^{m+1}\left(1 - \prod_{j=1}^{n} p_{ij}\right). \qquad (10.14)$$

Здесь: p_{ij} – вероятность безотказной работы j-го элемента i-й цепи (j = 1, ..., n); n – число последовательно соединенных элементов цепи.

Рисунок 10.4 –. Блок-схема общего резервирования с постоянно включенным резервом системы с последовательным соединением n элементов

Для случая, когда все элементы равнонадежные (с вероятностью безотказной работы, равной p), ВБР основной системы из n элементов (отказы случайные и независимые) равна: $P_0(t) = p^n(t)$.

Следовательно, вероятность отказа всей системы, состоящей из одной основной и m резервных систем, будет равна:

$$Q_c = Q_0 Q_1 \times \ldots \times Q_m = \left[1 - p^n(t)\right]^{m+1}. \qquad (10.15)$$

Тогда ВБР системы с общим резервированием равна:

$$P_{общ} = 1 - \left(1 - p^n\right)^{m+1}. \qquad (10.16)$$

Если интенсивность отказов постоянна, т. е. $p(t) = exp(-\lambda t)$, то $p^n(t) = e^{-n\lambda t}$ и, пользуясь (10.5), можно найти выигрыш надежности $W_T^{(3)}$ по среднему времени безотказной работы при работе системы, состоящей из (m + 1) параллельно работающих резервных систем (рис. 10.4) по сравнению со средним временем безотказной работы нерезервируемой системы:

$$W_T^{(3)} = \frac{\int_0^\infty \left[1-\left(1-e^{-n\lambda t}\right)^{m+1}\right]dt}{\int_0^\infty e^{-n\lambda t}dt} = \frac{\sum_{i=1}^{m+1}\frac{1}{i\lambda n}}{\frac{1}{n\lambda}} = \sum_{i=1}^{m+1}\frac{1}{i}. \qquad (10.17)$$

Выигрыш надежности $W_T^{(4)}$ по среднему времени безотказной работы при работе системы, состоящей из (m + 1) параллельно работающих резервных систем (рис. 10.4), по сравнению со средним временем безотказной работы одного элемента:

$$W_T^{(4)} = \frac{\int_0^\infty \left[1-\left(1-e^{-n\lambda t}\right)^{m+1}\right]dt}{\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt} = \frac{\sum_{i=1}^{m+1}\frac{1}{i\lambda n}}{\frac{1}{\lambda}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m+1}\frac{1}{i}. \qquad (10.18)$$

Рассмотрим случай системы с **раздельным резервированием** с постоянно включенным резервом, предполагая, что все элементы равнонадежные с вероятностями безотказной работы $p(t)$ (рис. 10.5).

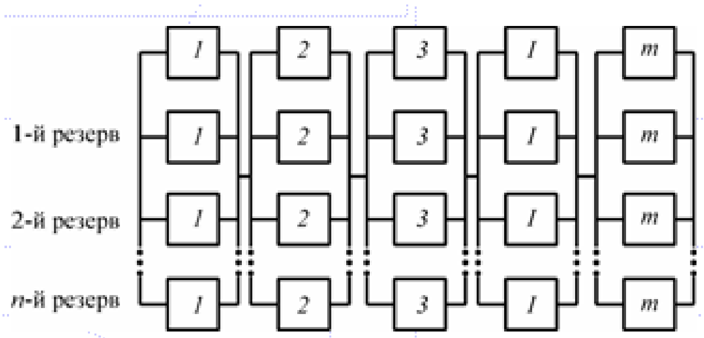


Рисунок 10.5 – Блок-схема раздельного резервирования с постоянно включенным резервом системы с последовательным соединением n элементов

Для системы с раздельным резервированием по формуле (10.14) могут быть определены ВБР отдельных элементов с резервированием. Тогда общая ВБР системы с раздельным резервированием определяется по формуле:

$$P_{раз} = \prod_{j=1}^{n}\left(1-\prod_{i=1}^{m+1}\left(1-p_{ij}\right)\right). \qquad (10.19)$$

Для случая, когда все элементы равнонадежные, ВБР системы с раздельным резервированием равна:

$$P_{раз} = \left[1-\left(1-p\right)^{m+1}\right]^{n}. \qquad (10.20)$$

Выигрыш надежности по среднему времени безотказной работы при работе резервируемой системы по сравнению со средним временем безотказной работы основной системы при экспоненциальном законе распределения:

$$W_T^{(5)} = \frac{\int\limits_0^\infty \left[1-\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{m+1}\right]^n dt}{\int\limits_0^\infty e^{-n\lambda t}} = \frac{n!}{(m+1)} \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{\nu_i(\nu_i+1)\cdots(\nu_i+n-1)}. \qquad (10.\ 21)$$

10.2.2 По способу включения резерва. Резервные элементы можно постоянно включать на все время эксплуатации – применять постоянное резервирование (резервирование с постоянно включенным резервом без переключений) или только лишь при отказе основных – резервирование замещением.

При постоянном резервировании резервные элементы подсоединены к основным в течение всего времени работы и находятся в одинаковом с ними рабочем режиме. Постоянное включение резерва является единственно возможным в системах, где недопустим даже кратковременный перерыв в работе (например, в регулирующих системах технологических процессов). Хотя оно отличается простотой (отсутствием переключателей и кратковременных остановок в работе аппаратов), основным недостатком постоянного резервирования является повышенный расход ресурса резервных элементов. По этому способу обычно резервируются насосы, фильтры и т. п.

Если не удается применить постоянную параллельную работу аппаратов в химическом машиностроении, то необходимо использовать ***резервирование замещением*** («замещение с ненагруженным резервом»). Замещение производится автоматически или вручную.

При резервировании замещением (или «замещением с ненагруженным резервом») система проектируется таким образом, что при появлении отказа элемента она перестраивается и восстанавливает свою работоспособность путем замещения отказавшего элемента резервным. При этом не требуется регулировка в момент включения резервного элемента; резервный аппарат до включения его в работу может находиться в «теплом» или «холодном» состоянии – это сохраняет ресурс надежности каждого из устройств и повышает общую надежность всей системы. В случае однотипных элементов несколько резервных (или один) могут быть использованы для замены основных элементов в случае отказа.

Скользящее резервирование **– это резервирование замещением, при котором группа основных элементов резервируется одним или несколькими резервными элементами, каждый из которых может заменить любой из отказавших элементов данной группы**.

Скользящее резервирование используется для резервирования нескольких одинаковых или взаимозаменяемых элементов системы одним или несколькими резервными, причем резервирование может быть как нагруженным, так и ненагруженным. Отказ системы произойдет, если число отказавших основных элементов превысит число резервных. При скользящем (плавающем) резерве любой из резервных элементов может замещать любой основной элемент системы (например, холодильники, насосы). Скользящий резерв дает наибольший выигрыш в повышении надежности, но существенный его недостаток в том, что он возможен лишь для однотипных элементов (подсистем).

Схема скользящего резервирования в блоке очистки моноэтаноламина показана на рис.10.6.

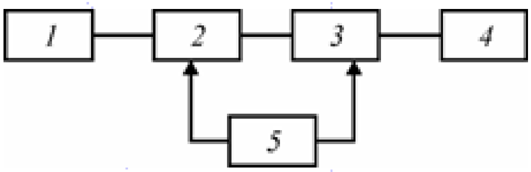


Рисунок 10.6 – Схема скользящего резервирования в блоке очистки моноэтаноламина:

1 – абсорбер; 2, 3 – насосы; 4 – узел регенерации; 5 – резервный насос

При нагруженном скользящем резервировании с идеальными переключателями расчет надежности системы аналогичен расчету системы типа «*m* из *n*». Если интенсивности отказов основных и резервных элементов постоянны и одинаковы, то вероятность безотказной работы системы, состоящей из n основных и m резервных элементов, в режиме нагруженного резерва можно определять по формуле:

$$P = \sum_{k=0}^{m} C_{n+m}^{k} p^{n+m-k} (1-p)^{k} . \qquad (10.22)$$

Если вероятность безотказной работы элементов подчиняется экспоненциальному закону, то можно рассчитать и среднюю наработку на отказ системы:

$$T = \frac{1}{n\lambda} + \frac{1}{(n+1)\lambda} + \cdots + \frac{1}{(n+m)\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=n}^{n+m}\frac{1}{k} . \qquad (10.23)$$

При ненагруженном скользящем резервировании в общем случае характеристики надежности системы выражаются сложными формулами. Однако если интенсивности отказов основных и резервных элементов постоянны и одинаковы, т. е. вероятность безотказной работы элементов подчиняется экспоненциальному закону, то вероятность безотказной работы системы, состоящей из n основных и m резервных элементов, в режиме ненагруженного резерва можно определять по формуле Пуассона:

$$P = \sum_{k=0}^{m} \frac{(n\lambda t)^{k}}{k!} e^{-n\lambda t} . \qquad (10.24)$$

Так как при ненагруженном скользящем резервировании суммарная интенсивность отказов равна n и отказ системы произойдет в момент отказа (m + 1)-го элемента, средняя наработка на отказ системы:

$$T = \frac{(m+1)}{n\lambda} . \qquad (10.25)$$

10.2.3 По режиму работы резерва. Расчет систем с нагруженным резервированием осуществляется по формулам последовательного и параллельного соединения элементов. При этом считается, что отказ резервной группы, состоящей из основного и резервных элементов, произойдет тогда, когда откажет ее последний элемент, и резервные элементы работают в режиме основных как до, так и после их отказа, поэтому надежность резервных элементов не зависит от момента их перехода из резервного в основное состояние.

При резервировании замещением возможны три вида условий работы резервных элементов до момента их включения в работу:

а) ***нагруженный (горячий) резерв***. Внешние условия резерва полностью совпадают с условиями, в которых находится рабочий аппарат. Резервные элементы работают в том же режиме, что и основной элемент, их надежность (вероятность безотказной работы) не зависит от того, в какой момент они включились на место основного. При этом ресурс резервных элементов объекта начинает расходоваться с момента включения в работу всей системы;

б) ***ненагруженный (холодный) резерв***. Резервные элементы выключены и по условию (до момента их включения на место основного) не могут отказать. Внешние условия, в которых находится резерв, настолько легче рабочих, что практически резервные элементы начинают расходовать свой ресурс только с момента включения в работу вместо отказавшего элемента.

в) ***облегченный (теплый) резерв***. Внешние условия, воздействующие на аппарат до момента его включения в работу, – облегченные. Резервные элементы находятся в облегченном режиме до момента их включения на место основного. Во время ожидания в резерве они могут отказать, но с вероятностью меньшей, чем вероятность отказа основного элемента (резерв, находящийся в более легких условиях, чем основной элемент).

Наработка на отказ системы с m-кратным общим нагруженным резервом может быть найдена из выражения:

$$T_{0m} = \int_0^\infty \left\{1 - \left[1 - p^n(t)\right]^{m+1}\right\} dt\,. \tag{10.26}$$

В случае экспоненциального закона надежности элементов получим:

$$T_{0m} = \int_0^\infty \left\{1 - \left[1 - e^{-\Lambda t}\right]^{m+1}\right\} dt\,, \tag{10.27}$$

где $\Lambda = 1/T_O$ – интенсивность отказов цепи.

После интегрирования представим (10.27) в виде конечной разности:

$$T_{0m} - T_{0m+1} = \frac{1}{\Lambda(m+1)}.$$

Подставляя в это уравнение последовательно m = 1, 2, 3, ..., получим:

$$T_{0m} = A_m T_0 = \frac{A_m}{\Lambda},$$

где

$$A_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m+1}\,. \tag{10.28}$$

При ненагруженном резервировании замещением резервные элементы включаются в работу при отказе основного, затем первого резервного и т. д., поэтому надежность элементов в каждый момент времени зависит от момента их перехода из резервного состояния в основное. При этом считается, что замена отказавшего элемента резервным происходит мгновенно, отказ системы произойдет тогда, когда откажет последний элемент. В нерабочем состоянии элемент не может отказать и его надежность не изменяется.

Ненагруженное резервирование встречается часто, т. к. оно аналогично замене отказавших элементов (деталей, узлов, агрегатов) на запасные.

Наработка на отказ системы при <u>*ненагруженном резерве*</u> может быть найдена из физических соображений.

Поскольку каждый следующий резервный элемент при ненагруженном резерве начинает работать только после отказа предыдущего, то наработка системы в целом будет представлять собой сумму наработок основной и всех резервных цепей:

$$T_{0m} = \sum_{i=1}^{m+1} T_{0i} \ ,$$

где T_{0i} – наработка на отказ i-й цепи.

Когда все резервные цепи одинаковы, наработка системы равна:

$$T_{0m} = (m+1)T_0 = \frac{m+1}{\Lambda} \ . \qquad (10.29)$$

*

<u>*Пример 10.1.*</u> Рассчитать вероятность безотказной работы дублированной способом замещения («холодный» резерв) системы, каждый из аппаратов которой имеет интенсивность отказов $\lambda = 0{,}005$ ч$^{-1}$ (т. е. их среднее время безотказной работы равно $T = 1/\lambda = 200$ ч) в течение $t = 40$ ч.

Решение. Вероятность безотказной работы одного нерезервируемого аппарата равна:

$$p_1(t) = \exp(-\lambda t) = 0{,}81873.$$

При $n = 1$ вероятность безотказной работы системы находим по формуле

$$P_2(t) = \exp(-\lambda t)\ (1 + \lambda t) \ = 0{,}982477.$$

Вероятность безотказной работы двух параллельно работающих аппаратов («горячий», или нагруженный, резерв) находим по формуле

$$P_3(t) = 1 - (1 - p_1(t))^2.$$

$$P_3(t) = 1 - (0{,}1813)^2 = 0{,}96714.$$

Таким образом, при «холодном» дублировании вероятность безотказной работы выше, чем при «горячем», среднее время безотказной работы при «холодном» дублировании $T_{ср} = 2/\lambda$ выше среднего времени безотказной работы $T_{ср} = 3/2\lambda$ при «горячем» дублировании, которое, в свою очередь, выше среднего времени безотказной работы $T_{ср} = 1/\lambda$ нерезервируемого аппарата.

*

Степень избыточности характеризуется кратностью резервирования.

Кратность резервирования – это соотношение между общим числом однотипных элементов и элементов, необходимых для работы системы:

$$k = (n - r)/r,$$

где n – число однотипных элементов в системе; r – число элементов, необходимых для функционирования системы.

Вопросы для самоконтроля.

1. Дайте определение резервирования. Какие виды резервирования существуют?
2. Приведите и охарактеризуйте различные способы структурного резервирования.
3. Общее резервирование. Схемы и расчет.
4. Раздельное резервирование с постоянно включенным резервом.
5. Дайте характеристику скользящего резервирования.

Приложение 1

Таблица нормального распределения (Гаусса)

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Приложение 2

Таблица значений интегральной функции Лапласа

x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)
0,00	0,0000	0,50	0,1915	1,00	0,3413	1,50	0,4332	2,00	0,4772	3,00	0,49865
0,01	0,0040	0,51	0,1950	1,01	0,3438	1,51	0,4345	2,02	0,4783	3,20	0,49931
0,02	0,0080	0,52	0,1985	1,02	0,3461	1,52	0,4357	2,04	0,4793	3,40	0,49966
0,03	0,0120	0,53	0,2019	1,03	0,3485	1,53	0,4370	2,06	0,4803	3,60	0,499841
0,04	0,0160	0,54	0,2054	1,04	0,3508	1,54	0,4382	2,08	0,4812	3,80	0,499928
0,05	0,0199	0,55	0,2088	1,05	0,3531	1,55	0,4394	2,10	0,4821	4,00	0,499968
0,06	0,0239	0,56	0,2312	1,06	0,3554	1,56	0.4406	2,12	0,4830	4,50	0,499997
0,07	0,0279	0,57	0,2157	1,07	0,3577	1,57	0,4418	2,14	0,4838	5,00	0,499997
0,08	0,0319	0,58	0,2190	1,08	0,3599	1,58	0,4429	2,16	0,4846		
0,09	0,0359	0,59	0,2224	1,09	0,3621	1,59	0,4441	2,18	0,4854		
0,10	0,0398	0,60	0,2257	1,10	0,3643	1,60	0,4452	2,20	0,4861		
0,11	0,0438	0,61	0,2291	1,11	0,3665	1,61	0,4463	2,22	0,4868		
0,12	0,0478	0,62	0,2324	1,12	0,3686	1,62	0,4474	2,24	0,4875		
0,13	0,0517	0,63	0,2357	1,13	0,3708	1,63	0,4484	2,26	0,4881		
0,14	0,0557	0,64	0,2389	1,14	0,3729	1,64	0,4495	2,28	0,4887		
0,15	0,0596	0,65	0,2422	1,15	0,3749	1,65	0,4505	2,30	0,4893		
0,16	0,0636	0,66	0,2454	1,16	0,3770	1,66	0,4515	2,32	0,4898		
0,17	0,0675	0,67	0,2486	1,17	0,3790	1,67	0,4525	2,34	0,4904		
0,18	0,0714	0,68	0,2517	1,18	0,3810	1,68	0,4535	2,36	0,4909		
0,19	0,0753	0,69	0,2549	1,19	0,3830	1,69	0,4545	2,38	0,4913		
0,20	0,0793	0,70	0,2580	1,20	0,3849	1,70	0,4554	2,40	0,4918		
0,21	0,0832	0,71	0,2611	1,21	0,3869	1,71	0,4564	2,42	0,4922		
0,22	0,0871	0,72	0,2642	1,22	0,3883	1,72	0,4573	2,44	0,4927		
0,23	0,0910	0,73	0,2673	1,23	0,3907	1,73	0,4582	2,46	0,4931		
0,24	0,0948	0,74	0,2703	1,24	0,3925	1,74	0,4591	2,48	0,4934		
0,25	0,0987	0,75	0,2734	1,25	0,3944	0,75	0,4599	2,50	0,4938		
0,26	0,1026	0,76	0,2764	1,26	0,3962	1,76	0,4608	2,52	0,4941		
0,27	0,1064	0,77	0,2794	1,27	0,3980	1,77	0,4616	2,54	0,4945		
0,28	0,1103	0,78	0,2823	1,28	0,3997	1,78	0,4625	2,56	0,4948		
0,29	0,1141	0,79	0,2852	1,29	0,4015	1,79	0,4633	2,58	0,4951		
0,30	0,1179	0,80	0,2881	1,30	0,4032	1,80	0,4641	2,60	0,4953		
0,31	0,1217	0,81	0,2910	1,31	0,4049	1,81	0,4649	2,62	0,4956		
0,32	0,1255	0,82	0,2939	1,32	0,4066	1,82	0,4656	2,64	0,4959		
0,33	0,1293	0,83	0,2967	1,33	0,4082	1,83	0,4664	2,66	0,4961		
0,34	0,1331	0,84	0,2995	1,34	0,4099	1,84	0,4671	2,68	0,4963		
0,35	0,1368	0,85	0,3023	1,35	0,4115	1,85	0,4678	2,70	0,4965		
0,36	0,1406	0,86	0,3051	1,36	0,4131	1,86	0,4686	2,72	0,4967		
0,37	0,1443	0,87	0,3078	1,37	0,4147	1,87	0,4693	2,74	0,4969		
0,38	0,1480	0,88	0,3106	1,38	0,4162	1,88	0,4699	2,76	0,4971		
0,39	0,1517	0,89	0,3133	1,39	0,4177	1,89	0,4706	2,78	0,4973		
0,40	0,1554	0,90	0,3159	1,40	0,4192	1,90	0,4713	2,80	0,4974		
0,41	0,1591	0,91	0,3186	1,41	0,4207	1,91	0,4719	2,82	0,4976		
0,42	0,1628	0,92	0,3212	1,42	0,4222	1,92	0,4726	2,84	0,4977		
0,43	0,1664	0,93	0,3238	1,43	0,4236	1,93	0,4732	2,86	0,4979		
0,44	0,1700	0,94	0,3264	1,44	0,4251	1,94	0,4738	2,88	0,4980		
0,45	0,1736	0,95	0,3289	1,45	0,4265	1,95	0,4744	2,90	0,4981		
0,46	0,1772	0,96	0,3315	1,46	0,4279	1,96	0,4750	2,92	0,4982		
0,47	0,1808	0,97	0,3340	1,47	0,4292	1,97	0,4756	2,94	0,4984		
0,48	0,1844	0,98	0,3365	1,48	0,4306	1,98	0,4761	2,96	0,4985		
0,49	0,1879	0,99	0,3389	1,49	0,4319	1,99	0,4767	2,98	0,4986		

Приложение 3

Критические точки *t*-распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,1	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,70	31,82	63,70	318,30	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)					

Приложение 4

Значения квантилей $\chi^2_{1-\alpha}(m)$ в зависимости от числа степеней свободы m и вероятности α

m/α	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,00016	0,00063	0,000393	0,0158	0,0642	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	0,446	3,219	4,606	5,991	7,824	9,210	13,815
3	0,115	0,815	0,352	0,584	1,005	4,642	6,251	7,815	9,837	11,341	16,268
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,465
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,517
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	11,030	13,362	15,507	18,679	20,090	26,125
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	2,588	3,059	3,940	4,865	6,179	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141	36,123
15	5,229	5,985	7,262	8,547	10,307	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	8,260	9,237	10,851	12,443	14,578	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	10,196	11,298	13,091	14,848	17,187	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	11,542	12,697	14,611	16,473	18,940	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	52,620
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

Приложение 5

Таблица значений $q = q(\gamma; n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,96	30	0,28	0,43	0,63
8	0,8	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,176	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Приложение 6

Биномиальные коэффициенты $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

n	m										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003
16	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008
17	1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448
18	1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758
19	1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378
20	1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756

Примечание: Для m >10 можно воспользоваться свойством симметрии: $C_n^m = C_n^{n-m}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Надійність технологічних систем та обладнання / Г.О. Оборський, О.С. Савєльєва, А.В. Торопенко, О.Л. Становський. – Одеса: Бахва, 2013. – 560 с.

2. Байхельт, Ф. Надежность и техническое обслуживание: Математический подход / Ф. Байхельт, П. Франкен. – М.: Ридио и связь, 1988. – 392 с.

3. Барлоу, Р. Статистическая теория надежности и испытания на безотказность. Пер. с англ. / Р. Барлоу, Ф. Прошан. – М.: Наука, 1984. – 328 с.

4. Ветошкин, А.Г. Надежность технических систем и техногенный риск / А.Г. Ветошкин. – Пенза: ПГУАиС, 2003. – 154 с.

5. Вопросы математической теории надежности / Е.Ю. Барзилович, Ю.К. Беляев, В.А. Каштанов и др. Под ред. Б.В. Гнеденко. – М.: Радио и связь, 1983. – 376 с.

6. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учеб. пособие для вузов. Изд. 7-е, стер. / В.Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 1999.-479с.

7. Гнеденко, Б.В. Математические методы в теории надежности / Б.В. Гнеденко, Ю.К. Беляев, А.Д. Соловьев. – М.: Наука, 1965. – 524 с.

8. Гнеденко, Б.В. Надежность и эффективность в технике. Справочник. Т.2. / Б.В. Гнеденко и др. – М.: Машиностроение, 1987.

9. ГОСТ 27.002-89. Надежность в технике. Основные понятия. Термины и определения.

10. ГОСТ 27.003–90. Надежность в технике. Состав и общие требования по надежности. М.: Изд-во стандартов, 1990.

11. ГОСТ 27.310 – 95. Надежность в технике. Анализ видов, последствий и критичности отказов. Основные положения.

12. Дунин-Барковский, И.В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике / И.В. Дунин-Барковский, Н.В. Смирнов. – М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1955.

13. Заміховський, Л.М. Основи теорії надійності і технічної діагностики систем: Навч. посібник / Л.М. Заміховський, В.П.Калявін. – Івано-Франківськ: Полум’я, 2004. – 360 с.

14. Зубова, А.Ф. Надежность машин и аппаратов химических производств. / А.Ф. Зубова. – Л.: Машиностроение, 1978.

15. Кафаров, В.В. Обеспечение и методы оптимизации надежности химических и нефтехимических производств / В.В. Кафаров. – М.: Химия, 1987.

16. Матвеевский, В.Р. Надежность технических систем. Уч. пособие./ В.Р. Матвеевский – М.: Московский государственный институт электроники и математики, 2002. – 113 с.

17. МР 159 – 85. Надежность в технике. Выбор видов распределений случайных величин. Методические рекомендации.

18. МР 252 – 87. Надежность в технике. Расчет показателей ремонтопригодности при разработке изделия. Методические рекомендации.

19. МЭК 60812: 1985 Техника анализа надежности систем. Метод анализа вида и последствий отказов (FMEA).

20. МЭК 61025: 1990. Анализ дерева неисправностей.

21. Надежность в машиностроении: Справочник. Под ред. В.В. Шашкина, Г.П. Карзова. – СПб.: Политехника, 1992. – 719 с.

22. Надежность и эффективность в технике. Справочник в 10 т. – т. 2. Под ред. Б.В.Гнеденко. – М. Машиностроение, 1987. – 280 с.

23. Надежность и эффективность в технике. Справочник в 10 т. – т. 5. Под ред. В.И. Петрушева и А.И. Рембезы. – М. Машиностроение, 1988. – 224 с.

24. Проников, А.С. Надежность машин / А.С. Проников. – М.: Машиностроение, 1978.

25. Р 50 – 54 – 82 – 88. Надежность в технике. Выбор способов и методов резервирования.

26. Райншке, К. Модели надежности и чувствительности систем / К. Райншке – М.: Мир, 1979.

27. Райншке, Ю. Оценка надежности систем с использованием графов. / Ю. Райншке, И.А. Ушаков. – М: Радио и связь, 1988.

28. Решетов, Д. Н. Надежность машин / Д.Н. Решетов, А.С. Иванов, В.З. Фадеев. – М.: Высшая школа, 1988.

29. Рябинин, И.А. Основы теории и расчёта надёжности судовых электроэнергетических систем. 2-е изд. / И.А. Рябинин. – Л.: Судостроение, 1971.

30. Рябинин, И.А. Надежность и безопасность структурно-сложных систем. / И.А. Рябинин. – С-Пб: Политехника, 2000.

31. Рябинин, И.А. Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем / И.А. Рябинин, Г.Н. Черкесов. – М.: Радио и связь, 1981. – 264 с.

32. Хазов, Б.Ф. Справочник по расчету надежности машин на стадии проектирования / Б.Ф. Хазов, Б.А. Дидусев. – М. : Машиностроение, 1986. – 224 с.

33. Чистяков, В. П. Курс теории вероятностей: Учеб. 3-е изд., испр. / В.П. Чистяков. – М.: Наука, 1987.

34. Ястребенецкий, М.А. Надежность автоматизированных систем управления технологическими процессами: Учеб. пособие для вузов. / М.А. Ястребенецкий, Г.М. Иванова – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 264 с.

35. http://dfe.petrsu.ru/koi/posob/PT/theory/unit-6.html

36. http://mathhelpplanet.com/static.php?p=mnogomernye-sluchainye-velichiny

37. http://www.aup.ru/books/m157/2_2_5.htm