УДК 141.201: 517.938.5

ЯКІСНА ТЕОРІЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ: ФІЛОСОФСЬКІ ПРОБЛЕМИ ТА ЕВОЛЮЦІЙНІ ПРОЦЕСИ

Буряк Дмитро, Крапива Наталія

У статті розглядаються деякі проблеми філософії загального положення й еволюційні процеси на прикладі становлення та розвитку якісної теорії диференціальних рівнянь і її методів – науки, що дає відповідь на запитання «Як влаштований світ?» – «Світ (еволюційні процеси) описується диференціальними рівняннями». На прикладі основних досягнень, отриманих групою одеських математиків під керівництвом Р. Г. Грабовської в теорії диференціальних рівнянь, робиться висновок, що історія розвитку якісної теорії диференціальних рівнянь – це історія від умогляду до доведення, це живе знання, що постійно розвивається.

***Ключові слова**: еволюційні процеси, якісна теорія диференціальних рівнянь.*

У цей час проблема розуміння ефективності диференціальних рівнянь і якісної теорії зокрема являє собою не тільки чисто академічний інтерес, це не просто створений людиною потужний інструмент пізнання – це засіб, який дозволяє здійснювати надійний контакт з об'єктивною реальністю. Усе сказане цілком співзвучно з філософським підходом. Адже з погляду філософії будь-яка наука, у тому числі математика, є відображенням реальності. Завдання науки – пізнавати, тобто відображати ті або інші об'єкти реальності, їх взаємозв'язки та взаємовідносини. Однак виникає проблема, яка викликана тим, що часом математичні об'єкти не існують в об'єктивній реальності, а їх властивості й відносини визначаються безпосередньо самою математикою, вони є результатом роботи людського мислення та в чистому вигляді існують тільки у свідомості людини. Інакше кажучи, проблема походження математичних об'єктів і їх співвідношення з об'єктивною реальністю виходить за межі математики, розв’язуючись, у тому числі, засобами філософії.

Ми не ставимо перед собою задачу розкрити основні філософські підходи до визначення природи математичних об'єктів, а як слідство, і предмета математики. Навіть, навпаки, ми хочемо показати, як математика, і диференціальні рівняння зокрема, реально діють у якості методу наукового пізнання, який історично вдосконалюється. Прагнемо визначити роль диференціальних рівнянь у загальній системі людської культури, показати, що ця теорія, як метод пізнання фізичного миру, має виняткову міць та ефективність в описі різного роду еволюційних процесів. Більше того, на прикладі якісної теорії диференціальних рівнянь проілюструємо те, як конструктивний діалог по тим або іншим проблемам, зв'язаним як з філософією, так і математикою, у процесі пошуку картини світобудови, дав поштовх розвитку одного конкретного методу зазначеної теорії.

Почнемо з історії якісної теорії диференціальних рівнянь, або, як тепер її частіше називають, теорія динамічних систем. Ісаак Ньютон, як відомо, був першою людиною, яка усвідомила, що еволюційні процеси, які відбуваються у світі всюди навколо нас, підкорюються, винайденим ним, диференціальним рівнянням. Ньютон

вважав цей свій винахід настільки важливим, що навіть зашифрував його у вигляді анаграми, зміст якої в сучасних термінах можна вільно передати так: «закони природи виражаються диференціальними рівняннями». Більше того, Ньютон створив математичний аналіз (похідні, ряди та ін.) головним чином для того, щоб складати та розв’язувати диференціальні рівняння. На підтвердження цих слів, тобто зв'язку еволюційних процесів і диференціальних рівнянь, можна привести приклад відкриття орбіти планет. Так Кеплер, вивчаючи поправки до астрономічних таблиць, складених датським астрономом Тихо Браге (Йоганн Кеплер – німецький астроном і математик, був помічником Браге) відкрив три закони, які можна звести в один, якщо сказати, що орбіта планети являє собою еліпс – за рівні проміжки часу радіус-вектор планети описує рівні площі, й час (період) обертання планети навколо Сонця є пропорційним до величини орбіти в степені 3/2-х (три других), тобто квадратному кореню з куба величини орбіти. Ці три закони Кеплера повністю описують рух планет навколо Сонця. Зауважимо, що Кеплер шукав розв'язок методом проб і помилок. А Ньютон цей факт довів аналітично, використовуючи, саме, диференціальні рівняння. Інакше кажучи, у якості висновку, можемо сказати наступне – на запитання «Як влаштований світ?» очевидна, нехай навіть груба, але дуже змістовна, відповідь: «Світ (еволюційний процес) описується диференціальними рівняннями».

Зробивши невеликий відступ, зауважимо, що теорія, яка була створена лише на одному емпіричному матеріалі (на матеріалі, зібраному Браге й узагальненому Кеплером), зненацька одержала підтвердження та застосування в зовсім іншій області – у математиці. Фахівці називають «незбагненною ефективністю математики» її величезні евристичні можливості. З погляду філософії ця ефективність є ще одним підтвердженням принципу матеріальної єдності світу та принципу детермінізму. За різноманіттям явищ, за уявною хаотичністю ховається єдність світу і його закономірна обумовленість. Математична творчість, яка на перший погляд дуже довільна, насправді спирається на вихідні положення та правила, що стали прямими абстракціями від матеріальної дійсності. Таким чином, опираючись на знання дійсного, математичне мислення прогнозує можливе.

Стає очевидним, що ми всюди бачимо еволюційні процеси, від руху атомів до динаміки планет. Ньютон першим зрозумів, що ці еволюційні процеси описуються диференціальними рівняннями, і що ці рівняння необхідно вміти розв’язувати.

Однак виявилося, що більшість диференціальних рівнянь розв'язати неможливо. Тут починається новий етап розвитку теорії диференціальних рівнянь, і починається він із робіт Анрі Пуанкаре. Створена ним «якісна або геометрична теорія диференціальних рівнянь» разом з теорією функцій комплексних змінних лягла в основу сучасної топології. Якісна теорія диференціальних рівнянь зараз одна з тих теорій, що активно розвивається й має важливі застосування в природознавстві.

Пуанкаре вважав, що диференціальні рівняння це – гілка геометрії. Виходячи з цього він почав розбудовувати теорію диференціальних рівнянь як теорію, що перебуває на стику геометрії та математичного аналізу. З усього сказаного можна зробити дуже важливий висновок. Якщо ми розглядаємо диференціальні рівняння на площині, то від рівняння можна перейти до геометричної задачі (наприклад, намалювати криві, які дотикаються заданого векторного поля), відповіддю до якої є геометричні картинки. Ці картинки й слід потім аналізувати. Таким чином, якісна теорія вивчає геометричні властивості розв'язків диференціальних рівнянь, безпосередньо використовуючи властивості правої частини рівняння. При цьому важливо розуміти, що навіть якісна поведінка розв'язку може бути дуже складною. Ситуація різко спрощується, якщо розглядати тільки рівняння загального положення. До речі, з погляду фізики, лише останні й становлять інтерес.

Перейдемо тепер до огляду задач, що належать до числа найбільш актуальних у якісній теорії диференціальних рівнянь, а саме задач, які пов'язані з вивченням асимптотичних властивостей розв'язків сингулярних диференціальних рівнянь та їх систем. До таких рівнянь, як відомо, зводяться математичні моделі механіки, електротехніки, атомної та ядерної фізики, фізхімії, математичної біології та ін., що тільки підтверджує думка Ньютона про зв'язок еволюційних процесів і диференціальних рівнянь, які їх описують. Напрямки досліджень даних рівнянь та їх систем досить різноманітні, але загальної теорії ще немає. Тому кожна нова задача й кожна нова її модифікація актуальна та потребує власних, не традиційних підходів і доведень фундаментальних теорем.

Звичайно ж, філософія проголошує принцип конкретності істини: будь-яка істина залишається таковою тільки в конкретних умовах. Але відмінності підходів до обґрунтування й методів розв'язання, нижче розглянутих задач, випливають із відмінності прийнятих ними абстракцій та ідеалізації. Кожний з підходів сприятливий у тих рамках, у яких застосовні його вихідні абстракції. Виходячи за ці рамки, як відомо, теорія приходить до протиріч. Але парадокси не спростовують теорію, а лише вказують на її границі. Якісна теорія диференціальних рівнянь, як і математика в цілому, – це багатогранне, живе знання, що постійно розвивається, яке неможливо раз і назавжди звести до єдиної основи. Це – по-перше. А по-друге, науково-технічні знання постійно змінюються, а теореми вічні. Як сказав відомий англійський математик Годфрі Харді «Математик, як художник чи поет, створює образи. Але його образи є більш сталими, адже вони написані фарбами ідей». Математика може доводити не лише абсолютну істину, а й абсолютну неможливість. Математична «краса» створюваних теорій є одним із критеріїв істинності.

Отже, перший важливий результат, в якому дана асимптотика розв'язків лінійних рівнянь із майже сталими коефіцієнтами, був встановлений Пуанкаре («Лема Пуанкаре», [Poincaré, 1885]) для рівняння виду:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0 \qquad (1)$$

де $p_i(x) \in C[x_0; +\infty)$, $i = \overline{1,n}$ функції, які задовольняють умовам $p_i(x) \to a_i$, $x \to +\infty$, $a_i \in R$, $i = \overline{1,n}$. Пуанкаре отримав «грубу» асимптотику для одного з розв'язків $y(x)$ рівняння (1) у випадку, коли всі корені характеристичного рівняння

$$\lambda^{(n)} + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (2)$$

мають різні дійсні частини.

Цей результат явився поштовхом для розвитку асимптотичних методів дослідження як лінійних рівнянь із майже сталими коефіцієнтами (О. Перон, А. Кнезер. А. Віман, М. Мателл, Н. Левінсон, Ф. Хартман, Д. Лутц, І. М. Рапопорт, М. В. Федорюк, М. І. Шкіль, А. Девинатц та ін. Чималий огляд ідей, робіт і результатів досліджень можна знайти, наприклад, в [Бутузов, 1967], так і нелінійних диференціальних рівнянь та їх систем (А. Пуанкаре, О. М. Ляпунов, О. Перон, Е. Коттон, Н. Левінсон, Л. Чезарі, Р. Беллман, Р. Конті, Ю. Кітамура, М. Хукухара та ін., наприклад [Чезарі, 1959]).

Наступним кроком були дослідження квазілінійних диференціальних рівнянь і систем. Тут окремо хотілося б відзначити роботи І. Т. Кігурадзе й Т. А. Чантурія та їх учнів, наприклад, І. Торошелідзе. Одним із напрямків їх досліджень з'явилося вивчення асимптотичних властивостей розв'язків суттєво нелінійних диференціальних рівнянь. Більше того, Т. А. Чантурія й І. Т. Кігурадзе розробили нові методи дослідження та одержали результати принципової важливості. Зокрема, ними встановлені тонкі ознаки коливання розв'язків лінійних диференціальних рівнянь, доведені загальні теореми про класифікацію рівнянь по осциляційним властивостям їх розв'язків, знайдені умови наявності або відсутності в нелінійних рівняннях розв’язків різних типів (сингулярних, правильних, монотонних тощо), зазначені асимптотичні формули для розв'язків досить широкого класу лінійних і нелінійних рівнянь і т. д., а також була зроблена спроба підвести підсумок усіх розглянутих раніше досліджень рівнянь даного класу [Кігурадзе,1990].

І, нарешті, логічним узагальненням вище розглянутих досліджень, стали дослідження інтегро-диференціальних і диференціально-операторних рівнянь та систем (огляд по цій тематиці був зроблений М. В. Азбелєвим [Азбелєв, 1985]), які виникають при розв’язанні різноманітних задач механіки, фізики і т. д.

Усі ці дослідження квазілінійних, интегро-диференціальних і диференціально-операторних рівнянь та систем черговий раз переконують нас у тому, що важливими методами розвитку математичних теорій є абстрагування та конкретизація, а загальною тенденцією є рух від конкретного до абстрактного. Процес послідовного узагальнення приводить до утворення все більш абстрактних понять і теорій, в які старі поняття та теорії входять в якості окремих випадків.

Але повернемося до Пуанкаре. В області математики його роботи, з одного боку, завершили класичний напрямок, з іншого – намітили шляхи до розвитку нової математики, в якій поряд з кількісними співвідношеннями встановлюються факти, що мають якісний характер. Ідеї Пуанкаре, зокрема його думка про те, що диференціальні рівняння – це гілка геометрії, послужили основою при створенні нових напрямків. До речі, під впливом геометричних методів, розроблених А. Пуанкаре, якісні методи дослідження диференціальних рівнянь почали називатися топологічними.

На жаль, не є можливим зробити широкий і всебічний огляд робіт, присвячених якісним методам дослідження інтегро-диференціальних і диференціально-операторних рівнянь та їх систем, скажемо лише те, що загальної теорії поки що немає.

Тому розглянемо метод гладких і кусково-гладких поверхонь без контакту, чітке формулювання якого було дано в роботах А. Пуанкаре [Poincaré, 1881] і О. М. Ляпунова [Ляпунов, 1935], і докладний опис якого можна знайти в книзі М. І. Гаврілова [Гаврілов, 1962]. Цей метод знайшов своє широке застосування як для конкретних систем, де будують поверхні без контакту й одержують певні властивості розв'язків (І. Бендіксон, М. Фроммер, Р. Г. Грабовська та ін.), так і для загальних класів систем, де передбачається існування таких поверхонь, а потім з їхньою допомогою дається характеристика деяких сімейств розв'язків (О. М. Ляпунов, І. Т. Кігурадзе, С. В. Ісраілов та ін.).

Зупинимося більш докладніше на результатах «школи Грабовської Р. Г.» – це, в основному, група одеських дифурщиків під керівництвом Грабовської Р. Г. (1931-2011). Отже, вперше якісний геометричний метод аналітичного продовження розв'язків поблизу особливої точки в комплексній області був запропонований Грабовською Р. Г. ще в 1958 році [Грабовська, 1958]. Ці дослідження були продовжені в роботах її учнів: Л. В. Чепурного, В. Г. Оскрого, Л. В. Просенюка. Далі, Р. Г. Грабовська і Й. Діблік запропонували новий метод дослідження диференціальних рівнянь та їх систем не розв'язаних відносно старшої похідної. А саме метод, який спирається на топологічний принцип Важевського, побудову поверхонь без контакту та на метод аналітичного продовження розв'язків поблизу особливої точки. Цей метод дозволив, після дослідження конкретної системи, вказати цілі класи більш загальних систем, що мають розв'язки з тією ж асимптотикою.

Свій подальший розвиток даний метод одержав у дисертації Г. Є. Самкової. У роботі вже розглядався клас систем диференціальних рівнянь, що містять не тільки особливі точки більш складної структури, але й сама система була сингулярною системою диференціальних рівнянь першого порядку, не розв'язаних відносно старшої похідної.

Наступним кроком у розвитку методу була його модифікація на випадок диференціально-операторних рівнянь та їх систем. Так, О. А. Тінгаєв розглядав наступну систему диференціально-операторних рівнянь:

$$\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Y}',\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{Y}(\cdot)\right)=0, \qquad (3)$$

де $\boldsymbol{F}:[0;\Delta_0]\times\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{L}[0;\Delta_0]\times\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{m}}\to\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{\eta}}$, причому початкова умова $\boldsymbol{x}=0$ задана для цієї системи в особливій точці, у якій, взагалі кажучи, не виконані умови теореми існування неявної функції відносно $\boldsymbol{Y}'$; $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x})$ – оператор, визначений на класі неперервних на $[0;\Delta_0]$ функцій. Введення оператора в (3) зажадало нового підходу до дослідження систем, у результаті чого був використаний принцип нерухливої точки Шаудера, який спирається на все той же топологічний принцип Важевського.

Продовженням з'явилася дисертація Крапиви Н. В., в якій досліджувалися: а) в дійсній області – клас сингулярних диференціально-операторних рівнянь типу Бесселя; б) в комплексній області – клас сингулярних диференціально-операторних рівнянь типу Бріо і Буке. У цій роботі вже використовується $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Y}(\cdot)$ – функціональний оператор від похідних вищого порядку двох змінних, визначених на класі функцій з $\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{n}}[0;\Delta_0]$. Методика дослідження все та сама – принцип

нерухливої точки Шаудера з використанням топологічного принципу Важевського, метод поверхонь без контакту, ідеї методу аналітичного продовження розв'язків поблизу особливої точки.

І нарешті, Буряк Д. В. у своїй дисертації досліджує асимптотику розв'язків деяких сингулярних при $\boldsymbol{x}\to+\infty$ квазілінійних диференціально-операторних рівнянь та їх систем, зокрема, розглядається випадок кратних коренів. Відмінними рисами роботи були: а) досліджуваний клас рівнянь та їх систем; б) наявність в системах функціонального оператора, що значно поширило клас розглянутих раніше задач. Зокрема, з'явилася можливість вивчення інтегро-диференціальних рівнянь із інтегралами довільної кратності; в) побудована спеціальна асимптотика при $\boldsymbol{x}\to+\infty$ для деяких розв'язків сингулярної квазілінійної диференціально-операторної системи рівнянь із необмеженими коефіцієнтами та ін. У якості методу досліджень використовується, відзначений вище, метод «школи Грабовської Р. Г.». Причому, в одному з випадків принцип Важевського застосовувався з використанням критерію Сильвестра. Дана робота стала черговим кроком у розвитку зазначеного методу та застосуванні топологічного принципу Важевського на більш широкий клас задач.

Підводячи підсумок, можна зробити висновок, що диференціальні рівняння – це суть нашого знання про реальний світ, а історія розвитку якісної теорії диференціальних рівнянь – це історія від умогляду до доведення. Це історія, що полягає у зміні хибних думок і розумінь. Кожна хибна думка стимулювала нове розуміння, а кожне розуміння було свого роду стрибком, після якого випливав великий розвиток, а потім, у спробі вийти за грань того, що було досягнуто в цьому розвитку, відбувалися нові хибні думки та нові розуміння відповідно. А як би хотілося написати диференціальне рівняння, про яке мріяв Лаплас. Лаплас, дотримуючись теорії, названої детермінізмом, виразив цю ідею в наступних словах: «Розум, якому були б відомі для якого-небудь даного моменту всі сили, що проявляються у природі, і відносне положення всіх її складових частин (якби на додачу цей розум виявився досить великим, щоб підкорити ці дані аналізу), – обійняв би в єдиній формулі рух найбільших тіл всесвіту нарівні з рухами найлегших атомів: не залишилося б нічого, що було б для нього недостовірно, і майбутнє так само, як і минуле, стало б перед його поглядом».

Список літератури

1. Азбелев Н. В. О некоторых тенденциях в обобщениях дифференциального уравнения. – Дифференц. уравнения. – 1985. – т. 21, № 8, с. 1291-1304.
2. Бутузов В. Ф., Васильева А. Б., Федорюк М. В. Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анал. 1967, ВИНИТИ, М., 1969, 5-73; Progr. Math., 8 (1970), 1-82.
3. Гаврилов Н. И. Методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1962.
4. Грабовская Р. Г. О квази-аналитических решениях одного класса нелинейных дифференциальных уравнений. – Труды Одесск. Ун-та, вып. 3. – 1958. – с. 89-108.
5. Кигурадзе, И. Т., Чантурия Т. А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1990. – 430 с.
6. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. – М.-Л.: ОНТИ, 1935.

7. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. (Eroebnisse der mathematik und ihrer orenzoebiete asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations, 1959). – Под ред. В. В. Немыцкого; Пер. с англ. А. Н. Черкасова. – М. : Мир, 1964. – 477 с.
8. Poincaré H. Sur les Equations Linéaires aux Différentielles Ordinaires et aux Différences Finies, American Journal of Mathematics, Vol. 7, No. 3 (Apr., 1885), pp. 203-258.
9. Poincaré H. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (I, II, III et IV). – Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 7 (1881), p. 375-422; 3e série, tome 8 (1882), p. 251-286; 4e série, tome 1 (1885), p. 167-244; 4e série, tome 2 (1886), p. 151-217 (А. Пуанкаре. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М.-Л.: ОГИЗ, 1947).

Dmytro Buryak, Nataliia Krapyva

QUALITATIVE THEORY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS: PHILOSOPHICAL PROBLEMS AND EVOLUTIONARY PROCESSES

There are discussed the problems of philosophy in general position and evolutionary processes on the example of the formation and development of a qualitative theory of differential equations and its methods. A qualitative theory of differential equations is a science answering the question «How this world really works?» – «The world (evolutionary processes) is described by differential equations». It substantiates the fact that the theory created by astronomers Tycho Brahe, Johannes Kepler on only one empirical material, has been confirmed and applied in mathematics. Isaac Newton proved Kepler's laws analytically, using differential equations. From the point of view of philosophy, the effectiveness of mathematics, including differential equations, is another confirmation of the principle of material unity of the world and the principle of determinism. The qualitative theory of differential equations is considered as a living knowledge that is constantly evolving. There are reviewed main achievements in the theory of differential equations of a group of Odessa mathematicians under the leadership of Grabovskaya R. G. It is concluded that the history of qualitative theory of differential equations is a history from insight to proof. It is a history that is about changing misconception and understandings. Every misconception stimulates a new understanding, and every understanding is a leap after which great development follows. Then there are new misconceptions and new understandings in trying to go beyond what has been achieved in this development.

Keywords: *evolutionary processes, qualitative theory of differential equations*.

References

1. Azbelev N.V. (1985) O nekotoryh tendentsiyah v obobscheniyah differencial'nogo uravnenyia, On some trends in generalizations of the differential equation, Moscow, J. Differential equations,V. 21, № 8, pp. 1291-1304.
2. Butuzov V.F., Vasilieva A.B. and Phedoruk M.V. (1967) Asimptoticheskie metody v teorii obyknovennyh differencial'nyh uravneniy, Asymptotic methods in the theory of ordinary differential equations, Proceedings of the Results of Science Invest., Ser. «Mathematics and Math. Analysis». Moscow, USSR Sci. and Ivest. Inst., pp. 5-73; Progr. Math., 8 (1970), pp. 1-82.
3. Gavrilov N.I. (1962) Metody teorii obyknovennyh differencial'nyh uravneniy, Methods of the theory of ordinary differential equations, Moscow : High School Publ. pp. 3-98
4. Grabovskaya R. G. (1958) «O kvazi-analiticheskih resheniyah odnogo klassa nelineynyh differencial'nyh uravneniy», On quasianalytic solutions of a class of nonlinear differential equations. Odessa: *Bulletin Odessa State University*, v. 3. pp. 89-108.
5. Kiguradze I. and Chanturia T.A. (1990) Asimptoticheskie svoystva resheniy neavtonomnyh obyknovennyh differencial'nyh uravneniy, Asymptotic properties of solutions of non-autonomous ordinary differential equations, Moscow : Nauka, 430 p.
6. Lyapunov A.M. (1935) Obschaya zadacha ob ustoychivosti dvizheniya, The general problem of traffic stability, Moscow – Leningrad : ONTI Publ. 221 p.
7. Chezari L. (1959) Asimptoticheskoe povedenie i ustoychivost' resheniy obyknovennyh differencial'nyh uravneniy, Asymptotic behavior and stability of solutions of ordinary differential equations. (Eroebnisse der mathematik und ihrer orenzoebiete asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations, 1959). Ed. transl.V.V. Nemitskiy and A. N. Cherkasov, Moscow: Mir Publ., 1964. 477 p.
8. Poincaré H. (1985) Sur les Equations Linéaires aux Différentielles Ordinaires et aux Différences Finies, American Journal of Mathematics, v. 7, No. 3 (Apr., 1885), pp. 203-258.
9. Poincaré H.(1881) Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (I, II, III et IV), Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 7 (1881), p. 375-422; 3e série, tome 8 (1882), p. 251-286; 4e série, tome 1 (1885), p. 167-244; 4e série, tome 2 (1886), pp. 151-217 (Poincaré H. (1947) O krivyh, opredelyaemyh differencial'nymi uravneniyami, About curves defined by differential equations. Moscow – Leningrad : OGIZ Publ. 120 p.

Стаття надійшла до редакції 23.03.2019