Міністерство освіти і науки України

Національний університет «Одеська політехніка»

Кафедра програмних і комп’ютерно-інтегрованих технологій

Методичні вказівки з дисципліни Числові методи.
(Лабораторний практикум)

Для студентів інституту штучного інтелекту та робототехніки

Перший (бакалаврський) рівень вищої освіти

Спеціальність: 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології

Освітньо-професійна програма: Комп'ютерні технології автоматизації.

Одеса 2022

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Одеська політехніка»
Кафедра програмних і комп'ютерно-інтегрованих технологій

Методичні вказівки з дисципліни Числові методи.
(Лабораторний практикум)

Для студентів інституту штучного інтелекту та робототехніки

Перший (бакалаврський) рівень вищої освіти

Спеціальність: 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології

Освітньо-професійна програма: Комп'ютерні технології автоматизації.

Затверджено на засіданні
кафедри програмних та комп'ютерно-інтегрованих технологій
Протокол № 7 від 26.01.2022р.

Одеса 2022

Методичні вказівки з дисципліни Числові методи (Лабораторний практикум). для студентів напряму 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» денної та заочної форм навчань./ Укл. Г.П. Лисюк, О.Б. Максимова - Одеса:ОП, 2022. – 54с.

ЗМІСТ

ВСТУП

При підготовці до кожної лабораторної роботи необхідно:

1. Ознайомитися зі змістом лабораторної роботи.
2. Опрацювати теоретичний матеріал у конспекті лекцій.

Перед лабораторною роботою і під час її виконання необхідно:

1. Одержати допуск до лабораторної роботи, відповівши на контрольні запитання викладача.
2. Виконати лабораторну роботу й записати її результати в особисту папку на ПК. Варіант співпадає з порядковим номером студента в списку підгрупи.
3. Оформити звіт про лабораторну роботу й захистити її у викладача.

Лабораторна робота № 1.

Тема: «Робота з наближеними даними»

Мета роботи. Знаходити абсолютну та відносну похибки результату. Навчитися виконувати обчислення з найменшою похибкою.

Теоретичні відомості.

Нехай X^* - наближене представлення числа **X**, тобто

$$X = X^* \pm \varepsilon_x, \quad \text{де } \varepsilon_x \text{ - похибка.}$$

Визначення 1.

Величина $\Delta(X) = \left|X - X^*\right| = \left|\varepsilon_x\right|$ називається **абсолютною похибкою** числа X за допомогою представлення числа X^*.

Максимально можливе значення ΔX, тобто число $\overline{\Delta X}$, яке задовольняє нерівності $\Delta X \le \overline{\Delta X}$, називається **граничною абсолютної похибкою** (помилкою).

Визначення 2. Величина, що дорівнює $\delta(X) = \dfrac{\left|X - X^*\right|}{\left|X^*\right|} = \dfrac{\Delta(X)}{\left|X^*\right|}$, називається відносною похибкою (помилкою) представлення числа X числом X^*.

Якщо $\delta(X) \le \overline{\delta(X)}$, то число $\overline{\delta(X)}$ називається **максимальною граничною відносною похибкою** (помилкою). Відносну похибку виражають зазвичай у відсотках.

Цифра числа називається **вірною** (у широкому сенсі), якщо абсолютна похибка цього числа не перевищує одиниці розряду, в якому стоїть ця цифра. Перша відкинута (невірна) цифра називається **сумнівною**. Говорять, що наближене дане **записано правильно**, якщо в його записі всі цифри вірні.

Значущими цифрами називаються всі цифри в його десятковому зображенні, відмінні від нуля, і нулі, якщо вони розташовані між значущими цифрами, або стоять наприкінці для вираження вірних цифр. Можна сказати й коротше: **значущими цифрами** числа є всі цифри в його правильної записи, починаючи з першої ненульовий зліва.

Існує три види округлення чисел:

- з надлишком, наприклад 2,354≈2,36;

- з недоліком (відкиданням), наприклад 2,358≈2,35;

- з найменшою похибкою, наприклад 2,357≈2,36.

Похибка результату арифметичних дій над наближеними значеннями чисел оцінюється за допомогою наступних правил:

I. **Гранична абсолютна похибка алгебраїчної суми** декількох чисел дорівнює сумі граничних абсолютних похибок доданків.

II. **Відносна похибка суми** додатних доданків не перевищує найбільшою з відносних похибок цих доданків.

III. **Гранична відносна похибка добутку і частки** наближених чисел дорівнює сумі граничних відносних похибок цих чисел.

IV. **Гранична відносна похибка степеню і кореня** наближеного числа дорівнює добутку граничної відносної похибки цього числа на показник степеню.

На практиці використовуються наступні **правила підрахунку цифр** при виконанні арифметичних дій з наближеними числами:

При множенні і діленні наближених чисел, взагалі кажучи, з різним числом вірних значущих цифр здійснюється округлення результату з числом значущих цифр, що збігаються з мінімальним числом вірних значущих цифр у початкових чисел.

При додаванні і відніманні наближених чисел, що мають різне число вірних цифр після коми результат округлюється за мінімальним числом вірних знаків після коми у початкових чисел.

Зауваження 1. На практиці при ручних обчисленнях з метою зменшення похибок округлення у наближених чисел, крім вірних значущих цифр, зазвичай залишають ще одну сумнівну. Ці сумнівні цифри відкидають при округленні остаточного результату.

Індивідуальне завдання.

№	Завдання.
1.	Визначити яка рівність точніше.
2.	Округлити з найменшою похибкою сумнівні цифри числа, залишивши вірні знаки. Визначити абсолютну похибку результату.
3.	Обчислити та визначити абсолютну похибку результату.
4.	Обчислити використовуючи правило підрахунку цифр.
5.	Розв’язати задачу.

Методика виконання роботи.

Завдання 1.

- Обчислити точне значення обох результатів.
- Обчислити абсолютну та відносну похибки обох величин.
- Порівняти відносні похибки цих величин.

Завдання 2.

- Обчислити граничне значення абсолютної похибки заданої величини, використовуючи відносну похибку.
- Округлити з найменшою похибкою сумнівні цифри числа, залишивши вірні знаки.
- Обчислити значення граничної абсолютної похибки округлення.
- Обчислити загальну абсолютну похибку.

Завдання 3.

- Обчислити абсолютні похибки сум та різниць.
- Знайти відносні похибки добутків, часток, та піднесення до степеню, обчисливши попередньо відносні похибки їх складаючих.
- Виконати вказані в умові дії, використовуючи наближені значення величин.
- Знайти абсолютну похибку результату, використовуючи значення відносної похибки.

Завдання 4

- Використовуючи правило підрахунку цифр обчислити значення сум та різниць.
- Використовуючи правило підрахунку цифр обчислити значення частки.

Завдання 5.

- Скласти формулу обчислення шуканої величини.
- Виконати дії, аналогічні діям з завдання 3.

Варіант №1

№	Завдання згідно варіанту
1.	$\sqrt{44} = 6{,}63$; 19/41=0,463
2.	2,8546; δ=0,3%
3.	$X = \left(\dfrac{ac}{m-n}\right)^2$, де a=4,3±0,05; c=8,2±0,05; m=12,417±0,003; n=8,37±0,005.
4.	$Y = \dfrac{2a-3b}{c}$, де a=4,3340; b=0,51; c=2,243
5.	Питомий електричний опір ρ металу круглого дроту довжиною 1 м з поперечним

	перерізом d мм і опором R Ом визначається за формулою: $\rho = \frac{\pi d^2 R}{4 \cdot l}$. Знайти ρ, якщо l = 12,50±0,01м, d = 2,00±0,01мм, R = 0,068±0,0005 Ом, π = 3,141±0,001. Визначити відносну похибку ρ.

Варіант №2

№	Завдання згідно варіанту
1.	$\sqrt{30} = 5{,}48$; 7/15=0,467
2.	17,2834 δ=0,3%;
3.	$X = \frac{c^3(a+b)}{m}$, де a=13,5±0,02; b=3,7±0,02; c=4,22±0,004; m=34,5±0,02.
4.	$Y = \frac{a}{c + 0{,}1b}$, де a=4,3660; b=0,48; c=2,203.
5.	Відстань S = 780 ± 2 км між двома залізничними станціями електровози проходять за час t = 9 ± 0,5 г. Визначити межі середньої швидкості електровозів на даній ділянці залізниці, знайти відносну похибку обчислень .

Варіант № 3

№	Завдання згідно варіанту
1.	$\sqrt{10{,}5} = 3{,}24$; 4/17=0,235
2.	34,834 δ=0,1%;
3.	$X = \frac{bm}{(c-n)^2}$, де b=11,7±0,04; c=10,536±0,002; m=0,56±0,005; n=6,32±0,008.
4.	$Y = \frac{0{,}2a + b}{c - 1}$, де a=2,3025; b=0,22; c=1,44
5.	Електроплитка розрахована на напругу 220 ± 10В. Знайти опір спіралі електроплитки, якщо відомо, що через неї повинен йти струм 5 ± 0,1А, визначити відносну похибку обчислень .

Варіант № 4

№	Завдання згідно варіанту
1.	$\sqrt{10} = 3{,}16$; 15/7=2,14
2.	0,34484; δ=0,4%
3.	$X = \frac{m+1}{\sqrt{c-n}}$, де c=145,5±0,08; m=0,28±0,006; n=28,6±0,1.
4.	$Y = \frac{4a - 3b}{c}$, де a=5,2216; b=0,23; c=4,243
5.	Мідний брусок має об'єм 0,0064 ≤ V ≤ 0,0065м^3. Знайти його масу, якщо щільність матеріалу 8899 ≤ ρ ≤ 8961кг/м^3, визначити похибку обчислень .

Варіант № 5

№	Завдання згідно варіанту
1.	$\sqrt{9{,}8}=3{,}13$;23/15=1, 53
2.	23,57; δ=0,2%
3.	$X=\dfrac{bc}{\sqrt{m+n}}$, де b=5,03±0,01; c=3,6±0,02; m=12,375±0,004; n=86,2±0,05.
4.	$Y=\dfrac{b}{c+0{,}2a}$, де a=4,3660; b=0,48; c=2,203
5.	Дослідним шляхом виявлено, що величина газової сталої R = 8313дж / (град·кмоль). Знаючи, що відносна похибка дорівнює 0,1%, знайти межі, в яких знаходиться R.

Варіант № 6

№	Завдання згідно варіанту
1.	$\sqrt{6{,}8}=2{,}61$; 12/11=1,091
2.	8,24163 δ=0,2%;
3.	$X=\dfrac{b}{\sqrt{(c-n)m}}$, де b=2,5±0,03; c=38,17±0,002; m=3, 6±0,04; n=9,14±0,005.
4.	$Y=\dfrac{0{,}3c+b}{a-2}$, де a=2,3025; b=0,22; c=1,44
5.	Автомобіль рухається по заокругленню радіусом 96≤r≤98 м зі швидкістю 8 ± 0,5м / с. Знайти його доцентрове прискорення, визначити похибку обчислень .

Варіант № 7

№	Завдання згідно варіанту
1.	$\sqrt{22}=4{,}69$; 2/21=0,095
2.	24,5643; δ=0,1%
3.	$X=\dfrac{\sqrt{a-b}\cdot m}{c}$, де a=9,542±0,001; b=3,128±0,002; c=0,172±0,001; m=2,8±0,03.
4.	$Y=\dfrac{2{,}1a-b}{c+3}$, де a=4,3340; b=0,51; c=2,243
5.	Довжина повітряної траси між двома пунктами дорівнює S км. Літак долає її за t годин. Визначити межі середньої швидкості літака, якщо: 4951 ≤ S ≤ 5051, 5,7 ≤ t ≤ 6,3, знайти відносну похибку обчислень .

Варіант №8

№	Завдання згідно варіанту
1.	$\sqrt{4{,}8}=2{,}19$; 6/7=0,857
2.	10,8441; δ=0,5%.

3.	$X = \frac{\sqrt[3]{a-b}}{m-0,1}$, де a=10,82±0,003; b=2,786±0,0006; m=0,28±0,006.
4.	$Y = \frac{b}{a+0,3b}$, де a=4,3660; b=0,48; c=2,203.
5.	Вертикальний циліндричний резервуар наповнений рідиною. Визначити час, необхідний для спорожнення резервуара через круглий отвір на дні. Діаметр резервуара D = 1 ± 0,01 м, висота резервуара H = 2±0,01 м, діаметр отвору дна d = 0,03±0,001 м, коефіцієнт витрати M = 0,61±0,02. Розрахунок ведеться за формулою: $t = \frac{D^2\sqrt{H}}{Md^2\sqrt{2g}}$. Визначити відносну похибку t.

Варіант № 9

№	Завдання згідно варіанту
1.	$\sqrt{83} = 9,11$; 6/11=0,545.
2.	21,685 δ=0,3%.
3.	$X = \left(\frac{a+b}{m-n}\right)^2$, де a=5,2±0,04; b=15,32±0,01; m=21,823±0,002; n=7,56±0,003.
4.	$Y = \frac{6a-c}{b}$, де a=2,33; b=0,51; c=2,2438.
5.	Довжина повітряної траси між двома пунктами дорівнює S = 6900 ± 40км. Літак долає її за t= 6,3 ± 0,1 годин. Визначити межі середньої швидкості літака та відносну похибку обчислень.

Варіант №10

№	Завдання згідно варіанту
1.	$\sqrt{52} = 7,21$; 17/19=0,889
2.	7,521; δ=0,12%
3.	$X = \frac{c^3(a+b)}{n}$, де a=18,5±0,03; b=5,6±0,02; c=3,42±0,003; n=14,782±0,006.
4.	$Y = \frac{0,5c+b}{a-1}$, де a=2,3025; b=0,2236; c=1,44
5.	Бак має форму зрізаного конуса, радіуси основ дорівнюють R = 1± 0,2 м та r = 0,2 ± 0,01 м, висота H=1,2± 0,1 м. Визначити об'єм конуса. Знайти відносну похибку результату, якщо π = 3,141±0,001.

Варіант №11

№	Завдання згідно варіанту
1.	$\sqrt{44} = 6,63$; 21/29=0,723
2.	35,67 δ=0,042%
3.	$X = \frac{am}{(c-n)^2}$, де a=3,236±0,002; c=12,415±0,003; m=0, 46±0,004; n=7,18±0,006.

4.	$Y=\dfrac{a}{c+0{,}2b}$, де a=4,1160; b=0,48; c=2,2034
5.	Бак має форму правильної зрізаної чотирикутної піраміди, сторони основ якої дорівнюють a_1 = 1± 0,2 м та a_2 = 0,2 ± 0,01м, висота H=1,6± 0,1 м. Визначити об’єм бака. Знайти відносну похибку результату.

Варіант №12

№	Завдання згідно варіанту
1.	$\sqrt{27}=5{,}19$; 50/19=2,63.
2.	0,85637; δ=0,21%.
3.	$X=\dfrac{bm}{\sqrt{c-n}}$, де b=1,27±0,002; c=342,3±0,04; m=0,71±0,003; n=11,7±0,1.
4.	$Y=\dfrac{0{,}6a+b}{c-5{,}1}$, де a=0,3025; b=0,12; c=6,44.
5.	Бак має форму півкулі, радіуса R = 1± 0,2 м Визначити об’єм бака та знайти відносну похибку результату, якщо π = 3,141±0,001.

Варіант №13

№	Завдання згідно варіанту
1.	$\sqrt{31}=5{,}56$;13/17=0,764.
2.	15,873; δ=0,42%.
3.	$X=\dfrac{c+1}{\sqrt{m+n}}$, де c=7,2±0,01; m=13,572±0,001; n=33,7±0,03.
4.	$Y=\dfrac{b}{a+0{,}5b}$, де a=0,3660; b=0,65; c=2,2.
5.	Бак має форму півкулі об’єм якої дорівнює V = 2,8±0,1 м^3. Визначити діаметр кулі, та знайти відносну похибку результату, якщо π = 3,141±0,001.

Варіант №14

№	Завдання згідно варіанту
1.	$\sqrt{13}=3{,}60$; 7/22=0,318.
2.	0,3945; δ=0,16%.
3.	$X=\dfrac{b}{\sqrt{(c-n)m}}$, де b=3,7±0,02; c=23,76±0,003; m=1,7±0,01; n=8,12±0,004.
4.	$Y=\dfrac{2a-b}{c+4}$, де a=4,3360; b=0,52; c=2,2.
5.	Бак має форму куба об’єм якого дорівнює V = 3,8±0,1 м^3. Визначити ребро цього куба, та знайти відносну похибку результату.

Варіант №15

№	Завдання згідно варіанту
1.	$\sqrt{28}=5{,}29$; 5/3=1,667.
2.	3,7542; δ=0,32%.
3.	$X=\dfrac{\sqrt{a-b}\cdot m}{n}$, де a=8,357±0,003; b=2,48±0,004; m=3,178±0,01; n=2,4±0,02.
4.	$Y=b\cdot\dfrac{0{,}5a+c}{c-1}$, де a=2,3025; b=0,22; c=1,44.
5.	Бак має форму циліндра, діаметр основи якого D = 0,5± 0,2 м, а висота H=1,2± 0,1 м. Визначити об'єм конуса та знайти відносну похибку результату, якщо π = 3,141±0,001.

Варіант №16

№	Завдання згідно варіанту
1.	$\sqrt{38}=6{,}16$; 7/3=2,33.
2.	23,8562; δ=0,026%.
3.	$X=\dfrac{\sqrt{a-b}}{m\bullet n}$, де a=8,357±0,003; b=2,48±0,004; m=3,178±0,01; n=2,4±0,02.
4.	$Y=b+\dfrac{a+c}{c-1}$, де a=2,3025; b=0,22; c=1,44.
5.	Бак має форму циліндра, діаметр основи якого D = 2,5± 0,1 м, а висота H=4,2± 0,2 м. Визначити об'єм конуса та знайти відносну похибку результату, якщо π = 3,141±0,001.

Варіант №17

№	Завдання згідно варіанту
1.	$\sqrt{37}=6{,}08$; 5/22=0,227.
2.	0,3245; δ=0,15%.
3.	$X=\dfrac{b}{\sqrt{(c+n)/m}}$, де b=3,7±0,02; c=23,76±0,003; m=1,7±0,01; n=8,12±0,004.
4.	$Y=\dfrac{2a-b}{c+4}$, де a=4,3260; b=0,32; c=2,2.
5.	Бак має форму куба об'єм якого дорівнює V = 5,8±0,1 м^3. Визначити ребро цього куба, та знайти відносну похибку результату.

Варіант №18

№	Завдання згідно варіанту
1.	$\sqrt{73}=8{,}54$; 7/19=0,368.

2.	0,1945; δ=0,16%.
3.	$X = \dfrac{b+c}{\sqrt{(c-n)m}}$, де b=3,7±0,02; c=23,76±0,003; m=1,7±0,01; n=8,12±0,004.
4.	$Y = \dfrac{2a+b}{c+4}$, де a=4,3360; b=0,52; c=2,1.
5.	Бак має форму правильної зрізаної чотирикутної піраміди, сторони основ якої дорівнюють a_1 = 2± 0,2 м та a_2 = 0,2 ± 0,01м, висота H=1,5± 0,1 м. Визначити об'єм бака. Знайти відносну похибку результату.

Варіант №19

№	Завдання згідно варіанту
1.	$\sqrt{10{,}5} = 3{,}24$; 4/17=0,235
2.	0,34484; δ=0,4%
3.	$X = \dfrac{m+1}{\sqrt{c-n}}$, де c=145,5±0,08; m=0,28±0,006; n=28,6±0,1.
4.	$Y = \dfrac{b}{a+0{,}5b}$, де a=0,3660; b=0,65; c=2,2.
5.	Бак має форму півкулі об'єм якої дорівнює V = 2,8±0,1 м^3. Визначити діаметр кулі, та знайти відносну похибку результату, якщо π = 3,141±0,001.

Варіант №20

№	Завдання згідно варіанту
1.	$\sqrt{27} = 5{,}19$; 50/19=2,63.
2.	34,834 δ=0,1%;
3.	$X = \dfrac{bm}{(c-n)^2}$, де b=11,7±0,04; c=10,536±0,002; m=0,56±0,005; n=6,32±0,008.
4.	$Y = \dfrac{2a-b}{c+4}$, де a=4,3360; b=0,52; c=2,2.
5.	Бак має форму куба об'єм якого дорівнює V = 3,8±0,1 м^3. Визначити ребро цього куба, та знайти відносну похибку результату.

Варіант №21

№	Завдання згідно варіанту
1.	$\sqrt{31} = 5{,}56$;13/17=0,764.
2.	0,1945; δ=0,16%.
3.	$X = \dfrac{b+c}{\sqrt{(c-n)m}}$, де b=3,7±0,02; c=23,76±0,003; m=1,7±0,01; n=8,12±0,004.
4.	$Y = \dfrac{6a-c}{b}$, де a=2,33; b=0,52; c=2,2438.

5.	Довжина повітряної траси між двома пунктами дорівнює S = 6900 ± 40км. Літак долає її за t= 6,3 ± 0,1 годин. Визначити межі середньої швидкості літака та відносну похибку обчислень.

Варіант №22

№	Завдання згідно варіанту
1.	$\sqrt{44} = 6{,}63$; 21/29=0,723
2.	23,57; δ=0,2%
3.	$X = \dfrac{bc}{\sqrt{m+n}}$, де b=5,03±0,01; c=3,6±0,02; m=12,375±0,004; n=86,2±0,05.
4.	$Y = \dfrac{2{,}1a - b}{c+3}$, де a=4,3340; b=0,51; c=2,243
5.	Довжина повітряної траси між двома пунктами дорівнює S км. Літак долає її за t годин. Визначити межі середньої швидкості літака, якщо: 4951 ≤ S ≤ 5051, 5,7 ≤ t ≤ 6,3, знайти відносну похибку обчислень .

Довідкові дані.

Середня швидкість $Vcep = \dfrac{S}{t}$	Об'єм циліндра $V = \pi R^2 H$
Доцентрове прискорення $a = \dfrac{V^2}{R}$	Об'єм конуса $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$
Щільність матеріалу $\rho = \dfrac{m}{V}$	Об'єм зрізаного конуса $V = \dfrac{1}{3}\pi H\left(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2\right)$
Закон Ома для ділянки кола $I = \dfrac{U}{R}$	Об'єм кулі $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$
Об'єм паралелепіпеда $V = abc$	Об'єм правильної чотирикутної зрізаної піраміди $V = \dfrac{1}{3}H\left(a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2\right)$
Об'єм куба $V = a^3$	

Контрольні питання

1. З яких частин складається загальна похибка завдання?
2. Що таке абсолютна похибка наближеного значення величини? гранична абсолютна похибка?
3. Що таке відносна похибка наближеного значення величини, гранична абсолютна похибка?
4. Які цифри в записі наближеного числа називаються вірними в широкому сенсі?

5. Які цифри в записі наближеного числа називаються значущими?
6. Що таке округлення числа? Які існують методи округлення?
7. Перерахуйте правила оцінки результату арифметичних дій над наближеними числами.

Лабораторна робота №2

Тема: «Відділення коренів алгебраїчного або трансцендентного рівняння та уточнення методами половинного ділення та дотичних та методом хорд».

Мета роботи: Навчитися відділяти корені алгебраїчного та трансцендентного рівняння, розв'язувати рівняння методами половинного ділення, дотичних і методом хорд.

Теоретичні відомості.

Нехай є рівняння виду:

$$F(x) = 0 \quad , \qquad (2.1)$$

де $F(x)$ - алгебраїчна або трансцендентна функція.

Розв'язати таке рівняння - значить встановити чи має воно корені, кількість коренів, і знайти значення цих коренів (або точно, або з потрібною точністю). Обмежимося обговоренням методів пошуку тільки дійсних коренів.

Вирішення цього завдання в досить загальному випадку починається з **відділення (локалізації) коренів**, тобто з встановлення:

- кількості коренів;

- найбільш «тісних» проміжків, кожен з яких містить лише один корінь.

Один із способів відділення коренів - графічний. Замінимо рівняння (2.1) рівносильним йому рівнянням:

$$f_1(x) = f_2(x) \qquad (2.2)$$

У цьому випадку будуються графіки функцій $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$, а потім на осі Ох відмічаємо відрізки, які містять абсциси точок перетину графіків цих функцій.

При вирішенні задачі про відділення коренів бувають корисними наступні очевидні положення:

1. Якщо неперервна на відрізку $[a;b]$ функція $F(x)$ приймає на його кінцях значення різних знаків, тобто $F(a)F(b) < 0$, то рівняння (2.1) має на цьому відрізку щонайменше один корінь.
2. Якщо функція до того ж ще монотонна, то корінь на відрізку єдиний.

Метод половинного ділення. Наведемо алгоритм цього метода

Нехай рівняння (2.1) має єдиний корінь на відрізку $[a;b]$, причому функція на цьому відрізку неперервна

Розділимо відрізок $[a;b]$ навпіл точкою $c=\dfrac{a+b}{2}$. Якщо $F(c)\neq 0$, то можливі два випадки: функція $F(x)$ змінює знак або на відрізку $[a;c]$, або на $[c;b]$. Перша умова виконується при $F(a)F(c)<0$, а друга – при $F(c)F(b)<0$. Обираючи відрізок, на якому функція змінює знак, та присвоюючі одному з кінців відрізка значення **c** (в першому випадку $b=c$, а у другому $a=c$), продовжуємо процес половинного ділення далі.

Критерієм зупинки даного алгоритму буде виконання умови $b-a\leq 2\varepsilon$. Слід відмітити, що в даному випадку ε - похибка методу.

Метод дотичних.

Ітераційна послідовність коренів рівняння будується цим методом за допомогою рекурентного співвідношення:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{F(x_n)}{F'(x_n)}. \qquad (2.3)$$

Процес продовжуємо до тих пір, поки $|f(x_n)|>\varepsilon$, де ε- задана точність. Іноді в інженерних розрахунках користуються таким критерієм зупинки, як $|x_n-x_{n-1}|\leq\varepsilon$,

Питання про вибір початкового наближення x_0 та гарантованої збіжності ітерацій вирішується просто, якщо функція $F(x)$ задовольняє наступним умовам:

1) є такою, що двічі диференціюється на відрізку $[a;b]$;
2) обидві похідні - перша і друга - не змінюють знак на цьому відрізку, тобто функція $F(x)$ монотонна і не змінює характеру опуклості.

У такій ситуації за x_0 береться той кінець відрізку $[a;b]$, на якому функція $F(x)$ і її друга похідна мають однакові знаки.

Метод хорд.

Цей ітераційний метод, подібний до розглянутому вище методу половинного ділення, полягає в періодичному розподілі відрізка на дві частини з вибором з них тієї, яка містить корінь рівняння. Однак у методі хорд точка, за допомогою якої вихідний відрізок ділиться на дві частини, вибирається не як середня, а обчислюється за формулою

$$c=a-\frac{\mathrm{F}(a)}{F(b)-F(a)}(b-a). \qquad (2.4)$$

Точка с ділить $[a;b]$ на дві частини. Так же як в методі половинного ділення вибирається та, на кінцях якої функція $F(x)$ приймає протилежні знаки. Далі процес повторюється багатократно та може бути зупинений за умовою $|\mathrm{F(x)}|\leq\varepsilon$.

Індивідуальне завдання

1. Відділити корінь рівняння за допомогою графіка.
2. Уточнити корінь рівняння з точністю ε=0,01 методом половинного ділення.
3. Уточнити корінь рівняння з точністю ε=0,01 методом дотичних.
4. Уточнити корінь рівняння з точністю ε=0,01 методом хорд.

Варіант	Рівняння	Варіант	Рівняння
1.	$x^3 + 1{,}5x - 3 = 0$	9.	$x^3 + 2x - 4 = 0$
2.	$\sqrt{x} + x - 1 = 0$	10.	$\sqrt{x} + 4x - 1 = 0$
3.	$x^3 + x + 1 = 0$	11.	$x^3 - x - 1 = 0$
4.	$\sqrt{x} + 1{,}5x - 3 = 0$	12.	$\sqrt{x} + x - 4 = 0$
5.	$x^3 - 0{,}5x + 1 = 0$	13.	$x^3 + 2x + 4 = 0$
6.	$\sqrt{x} - x + 1 = 0$	14.	$\sqrt{x} + 2x - 4 = 0$
7.	$x^3 + 0{,}5x - 2 = 0$	15.	$x^3 - x - 2 = 0$
8.	$\sqrt{x} - 2x + 2 = 0$	16.	$\sqrt{x} + 0{,}25x - 1 = 0$
17.	$x^3 + 3x - 2 = 0$	18.	$x^3 - 1{,}5x + 3 = 0$
19.	$x^3 + 2x - 4 = 0$	20.	$\sqrt{x} + x - 1 = 0$
21.	$\sqrt{x} + 4x - 1 = 0$	22.	$x^3 + x + 1 = 0$

Методика виконання роботи.

Завдання 1.

- Привести рівняння до виду 2.2 таким чином, щоб отримані функції були елементарні. Побудувати в одній прямокутній системі координат графіки отриманих функцій
- Визначити за графіком кількість точок перетину цих графіків та визначити відрізки до яких належать абсциси цих точок.

Завдання 2.

- Взявши за початковий відрізок той, що був знайдений у завданні 1, обчислити наближене значення кореня заданого рівняння за алгоритмом метода половинного ділення. Результати занести до таблиці:

№ ітерації	a	b	b-a	c	F(a)	F(c)	Знак F(a)F(c)
1.							

- Записати результат, враховуючи точність обчислень.

Завдання 3.

- Взявши за початковий відрізок той, що був знайдений у завданні 1, обчислити значення функції $F(x)$ та її другої похідної на кінцях цього відрізку. Вибрати за початкове наближення той кінець відрізку, який задовольняє умові: $F(x)$ і її друга похідна мають однакові знаки.
- Обчислити наближене значення кореня заданого рівняння за алгоритмом метода дотичних. Результати занести до таблиці:

n – номер ітерації	x_n	$F(x_n)$	$F'(x_n)$	x_{n+1}
1.				

- Записати результат, враховуючи точність обчислень.

Завдання 4.

- Взявши за початковий відрізок той, що був знайдений у завданні 1, обчислити наближене значення кореня заданого рівняння за алгоритмом метода хорд. Результати занести до таблиці:

№ ітерації	a	b	c	F(a)	F(b)	F(c)	Знак F(a)F(c)
1.							

- Записати результат, враховуючи точність обчислень.

Контрольні питання

1. Назвіть основні етапи процесу знаходження кореня нелінійного рівняння числовими методами.
2. Які існують методи відділення кореня рівняння. Охарактеризуйте їх .
3. Опишіть алгоритм методу ділення відрізка навпіл.
4. Дайте геометричну інтерпретацію методу ділення відрізка навпіл.
5. Опишіть алгоритм методу дотичних та умову його збіжності.
6. Дайте геометричну інтерпретацію методу дотичних.
7. Опишіть алгоритм методу хорд.
8. Дайте геометричну інтерпретацію методу хорд.

Лабораторна робота №3

Тема: «Уточнення коренів алгебраїчного або трансцендентного рівняння методами простих ітерацій».

Мета роботи: Навчитися розв’язувати алгебраїчні та трансцендентні рівняння методом простих ітерацій та використовувати отримані навички при розв’язанні прикладних задач.

Теоретичні відомості.

Нехай є рівняння виду:

$$F(x) = 0 \ , \tag{3.1}$$

де $F(x)$ - алгебраїчна або трансцендентна функція.

Метод простих ітерацій

Метод простих ітерацій полягає на приведенні рівняння $F(x)$=0 до наступного виду: $x = \varphi(x)$. При цьому процес послідовного наближення до кореня будується на основі ітераційної формули:

$$x_{i+1} = \varphi(x_i\ ). \tag{3.2}$$

Очевидно, розрахункову формулу можна отримати використовуючи наступний ланцюжок перетворень:

$F(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad b \cdot F(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{b \cdot F(x) + x}_{\varphi(x)} = x \quad \Rightarrow \quad x = \varphi(x)$, де b - множник, який не дорівнює нулю. Але треба враховувати, що збіжність процесу наближення до кореня в значній мірі визначається видом залежності $\varphi(x)$, а саме, необхідно виконання умови

$$|\varphi'(x)| < 1. \tag{3.3}$$

Функцію $\varphi(x)$ будемо шукати із співвідношення

$$\varphi(x) = x - \frac{F(x)}{k},. \tag{3.4}$$

Вважаючи, що $|k| \geq Q/2$, де $Q = \max\limits_{[a;b]}|F'(x)|$; число k має той же знак, що і F' на відрізку [a; b].

Критерієм зупинки можна вважати виконання однієї з умов:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon \quad \text{або} \quad |\mathrm{F}(\mathrm{x_n})| \leq \varepsilon .$$

Індивідуальне завдання

1. Відділити корінь рівняння за допомогою графіка.
2. Уточнити корінь рівняння з точністю ε=0,01 методом простих ітерацій.

Варіант	Рівняння	Варіант	Рівняння
1.	$2^x+5x-3=0$	9.	$x-2+\sin x=0$
2.	$0{,}5^x+1-(x+2)^2=0$	10.	$x-3\ln x=0$
3.	$5^x+x-2=0$	11.	$x-2\cos x=0$
4.	$e^{x-1}+x-1=0$	12.	$0{,}5x-2\ln x=0$
5.	$0{,}3^{x+2}-x-2=0$	13.	$3x+\cos x+1=0$
6.	$4^{x+1}+5x-1=0$	14.	$2-x-\ln x=0$
7.	$e^{x+2}+3x+3=0$	15.	$x+\cos x+1=0$
8.	$2^{x-3}+2x-6=0$	16.	$3x-e^x=0$
17.	$2^x-5x+3=0$	18.	$2^x+3x-2=0$
19.	$2^x+5x-3=0$	20.	$x-3\ln x=0$
21.	$5^x+x-2=0$	22.	$x-2\cos x=0$

Методика виконання роботи.

Завдання 1.

- Побудувати графік функції, вигляд якої співпадає з лівою частиною заданого рівняння.
- Визначити кількість точок перетину графіка з віссю Ох та відрізки, до яких вони належать абсциси цих точок.

Завдання 2.

- За формулою 3.4 знайти вид функції $\varphi(x)$, взявши за початковий відрізок той, що був знайдений у завданні 1.
- Обчислити наближене значення кореня заданого рівняння за формулою 3.4. Результати занести до таблиці:

n – номер ітерації	x_n	$\varphi(x_n)$
1.		

- Записати результат, враховуючи точність обчислень.

Контрольні питання

1. Опишіть алгоритм методу простих ітерацій та умову його збіжності.
2. Дайте геометричну інтерпретацію методу простих ітерацій.

Лабораторна робота № 4

Тема: «Знаходження рішення системи лінійних рівнянь числовими методами».

Мета роботи: Навчитися розв’язувати системи лінійних рівнянь числовими методами та використовувати отримані навички при розв’язанні прикладних задач.

Теоретичні відомості.

Метод Крамера

Одним із способів розв'язання системи лінійних рівнянь є правило Крамера, згідно з яким кожне невідоме представляємо у вигляді співвідношення визначників. Запишемо його для системи

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

тоді: $x_1 = \frac{D_1}{D}$, $x_2 = \frac{D_2}{D}$.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 a_{12} \\ b_2 a_{22} \end{vmatrix}, \; D_2 = \begin{vmatrix} a_{11}\, b_1 \\ a_{21}\, b_2 \end{vmatrix}$$

Метод Гауса

Метод Гауса або метод послідовного виключення невідомих найбільш розповсюдженим з точних (прямих) методів рішення СЛАР.

Прямий хід приводить систему (4.1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{4.1}$$

до еквівалентної до неї системи виду

$$\begin{cases} x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + ... + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1 \\ \qquad x_2 + ... + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad \tilde{a}_{nn}x_n = \tilde{b}_n \end{cases} \tag{4.1$'$}$$

Для цього спочатку перше невідоме виключають з другого і наступних рівнянь системи, потім друге невідоме виключають з третьої і наступних рівнянь і так далі. Таким чином, в останньому рівнянні залишається тільки одне невідоме.

Зворотний хід призводить систему (4.1') до еквівалентної їй системою виду:

$$\begin{cases} x_1 = \tilde{\tilde{b}}_1 \\ x_2 = \tilde{\tilde{b}}_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n = \tilde{\tilde{b}}_n \end{cases} . \qquad (4.1'')$$

Для реалізації прямого і зворотного ходів використовують наступні відомі правила:

- будь-яке рівняння системи можна помножити на постійний коефіцієнт;
- можна скласти два рівняння системи і результат записати замість одного з цих рівнянь.

Метод простих ітерацій.

Для застосування методу ітерацій вхідну систему (4.1) необхідно привести до виду

$$\bar{x} = G\,\bar{x} + \bar{f} \qquad (4.2)$$

Та потім ітераційний процес виконується за рекурентною формулою

$$\bar{x}^{(k+1)} = G\,\bar{x}^{(k)} + \bar{f}\ ,\ \text{k} = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (4.3)$$

Матриця G та вектор $\bar{f}$ отримані в результаті перетворення системи (4.1).
Даний метод знаходження наближеного рішення системи рівнянь називається **методом простих ітерацій**.
Одною з умов збіжності даного метода є умова діагонального домінування вхідної матриці A, тобто

$$|a_{ii}| > \sum_{i,j=1;i\neq j}^{n} |a_{ij}|, \qquad A = \{a_{ij}\}_1^n . \qquad (4.4)$$

Найчастіше за початкове наближення $\bar{x}^{(0)}$ беруть вектор або нульовий, або одиничний, або сам вектор $\bar{f}$ з (4.3).

Існує багато підходів до перетворення початкової системи (4.1) з матрицею A до виду (4.4) з умови збіжності (4.4).

Умова зупинки:

$$\left|\bar{x}^{(k)} - \bar{x}^{(k-1)}\right| \le \varepsilon \ \text{або}\ max\left\{\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right|, i = \overline{1;n}\right\} \le \varepsilon . \qquad (4.5)$$

Метод Зейделя

Даний метод є модифікацією метода простих ітерацій та для системи (4.3) $\bar{x} = G\,\bar{x} + \bar{f}$ має наступну рекурентну формулу:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= g_{11}x_1^k + \ldots + g_{1n}x_n^k + f_1; \\ x_2^{(k+1)} &= g_{21}x_1^{(k+1)} + \ldots + g_{2n}x_n^{(k)} + f_2; \\ x_3^{(k+1)} &= g_{31}x_1^{(k+1)} + \ldots + g_{31}x_n^{(k)} + f_3; \\ &\ldots \\ x_n^{(k+1)} &= g_{n1}x_1^{(k+1)} + \ldots + g_{nn}x_n^{(k)} + f_n. \end{aligned} \qquad (4.6)$$

Суть його складається в тому, що при обчисленні чергового наближення $x_i^{(k)}$ $\left(2 \le i \le n\right)$ в системі (4.4) та в формулі (4.5) замість $x_i^{k-1}, \dots, x_{i-1}^{k-1}$ використовуються вже знайдені на даній ітерації $x_1^k, \dots, x_{i-1}^k$, тобто (4.5) перетворюється до виду

$$x_i^k = \sum_{j=1}^{i-1} g_{ij} x_j^k + \sum_{j=i+1}^{\bar{n}} g_i x_j^{k-1} + f_i \text{ , i = 1, …, n.} \tag{4.7}$$

Це дозволяє прискорити збіжність приблизно у два рази. Умови збіжності та зупинки аналогічні тим, що застосовувались в методі простих ітерацій.

Індивідуальне завдання

1. Розв'язати систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

а) методом Крамера;
б) методом Гауса;
в) методом ітерацій;
г) методом Зейделя.

Коефіцієнти задані в таблиці відповідно до варіанту.

№ варіанта	a_{11} / a_{21} / a_{31}	a_{12} / a_{22} / a_{32}	a_{13} / a_{23} / a_{33}	b_1 / b_2 / b_3
1	5	1	-3	10
	2	7	2	14
	4	1	6	0
2	6	1	3	25
	2	-7	2	3
	4	1	7	27
3	8	1	3	7
	2	7	-2	3
	4	1	5	11
4	4	1	3	1
	2	9	2	18
	4	1	6	4

5	6 2 4	1 7 1	3 2 8	23 22 22
6	8 3 4	1 7 1	3 1 9	31 25 9
7	7 3 2	-1 8 1	3 1 6	30 30 6
8	6 3 1	1 8 4	3 -1 6	22 -9 7
9	9 3 2	2 -8 3	1 4 6	25 33 12
10	5 3 2	1 -7 3	3 4 10	4 -16 27
11	8 1 3	2 6 3	3 4 8	45 44 81
12	7 3 2	1 8 3	3 2 6	3 15 -4
13	4 3 2	2 -5 3	-1 4 10	0 -10 27
14	-5 3 2	1 -7 3	3 4 -9	9 -13 -9
15	6 3	1 -8	3 4	0 5

	4	3	9	14
16	6 3 1	1 8 4	3 -1 6	22 -9 7
17	9 3 2	2 -8 3	1 4 6	25 33 12
18	5 3 2	1 -7 3	3 4 10	4 -16 27
19	5 2 4	1 7 1	-3 2 6	10 14 0
20	6 2 4	1 -7 1	3 2 7	25 3 27
21	8 2 4	1 7 1	3 -2 5	7 3 11
22	4 2 4	1 9 1	3 2 6	1 18 4

Методика виконання роботи.

Завдання 1.

- Знайти наближене рішення системи методом Крамера.

Завдання 2.

- Виконати прямий хід метода Гауса.
- Виконати зворотній хід метода Гауса. Записати результат.

Завдання 3.

- Перевірити виконання умови збіжності (4.4) системи .
- Знайти наближене рішення системи методом простих ітерацій.

Завдання 4.

- Знайти наближене рішення системи методом Зейделя.

Контрольні питання

1. До якого типу методів, прямим або ітераційним, відноситься метод Гаусса?
2. У чому полягає прямий і зворотний хід у схемі Гаусса?
3. Метод оберненої матриці та правило Крамера для розв'язання систем лінійних рівнянь.
4. Опишіть метод ітерацій для розв'язання систем лінійних рівнянь.
5. Сформулюйте умову збіжності ітераційних методів для розв'язання систем лінійних рівнянь.
6. Опишіть метод Зейделя.

Лабораторна робота № 5

Тема: «Числове інтегрування».

Мета роботи: Навчитися обчислювати визначені інтеграли числовими методами та використовувати отримані навички при розв’язанні прикладних задач.

Теоретичні відомості.

1. Формула лівих прямокутників: $\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$, де $h=\frac{(b-a)}{n}$ - крок.

2. Формула правих прямокутників: $\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$, де $h=\frac{(b-a)}{n}$ - крок.

3. Формула середніх прямокутників: $\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})$, де $h=\frac{(b-a)}{n}$ крок.

4. Формула трапецій: $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0)+2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(x_n)\right]$, де $h=\frac{(b-a)}{n}$ - крок.

5. Формула Сімпсона:

$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f(x_0)+4(f(x_1)+f(x_3)+...+f(x_{n-1}))+2(f(x_2)+f(x_4)+...+f(x_{n-2}))+f(x_n))$, де $h=\frac{(b-a)}{n}$ - крок.

6. Правило Рунге: Нехай ε – задана точність обчислення інтегралу, тоді крок h повинен задовольняти умові: $h \le \sqrt[4]{\varepsilon}$.

7. Метод Рунге. Нехай I_h - наближене значення інтегралу, що обчислене з кроком h, а I_{2h} - значення цього інтегралу, що обчислене з кроком 2h. Якщо $\frac{|I_h - I_{2h}|}{15} < \varepsilon$, де I_h і I_{2h} обчислені за методом Сімпсона, або $\frac{|I_h - I_{2h}|}{3} < \varepsilon$, де I_h і I_{2h} обчислені за методом прямокутників або трапецій, то в якості наближеного значення інтеграла беруть значення I_h . Якщо нерівність для відповідного метода не виконується, то знайдене значення інтеграла не задовольняє заданій точності. Тоді проводять нові обчислення з кроком $h/2$ та знову перевіряють виконання вказаної нерівності. Цей прийом багаторазового зменшення кроку застосовують до тих пір, поки відповідна нерівність не стане істиною.

Індивідуальне завдання

1. Обчислити інтеграл методом прямокутників (лівих, правих, середніх на вибір), розбивши інтервал інтегрування на 8 частин.
2. Обчислити інтеграл методом трапецій з точністю Ɛ=0,01, використовуючи правило Рунге.
3. Обчислити інтеграл, використовуючи числовий метод Сімпсона

1.	$\int_{0,8}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$	6.	$\int_{0,6}^{1,4} \frac{\cos x}{\sin x + 4} dx$	11.	$\int_{1,2}^{2.} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 0{,}16}}$
2.	$\int_{1,2}^{2} \frac{\ln(x+2)}{x+2} dx$	7.	$\int_{1,2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 0{,}36}}$	12.	$\int_{1,2}^{1,8} \frac{\ln(x+3)}{x+3} dx$
3.	$\int_{1,2}^{2.} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 0{,}16}}$	8.	$\int_{0,2}^{1} \frac{tgx + 2}{\cos^2 x} dx$	13.	$\int_{5}^{6,4.} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 16}}$
4.	$\int_{0,6}^{1,8} (x+1)\sin x dx$	9.	$\int_{2,2}^{2,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$	14.	$\int_{0,6}^{1,8} (x+1)e^{x^2+2x} dx$
5.	$\int_{0,8}^{1,4.} \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}$	10.	$\int_{1,6}^{2,,4} (x+2)\cos x dx$	15.	$\int_{0,8}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 0{,}36}}$
16.	$\int_{0,8}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$	17.	$\int_{1,2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 0{,}3}}$	18.	$\int_{1,2}^{2.} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 0{,}14}}$
19.	$\int_{1,2}^{2} \frac{\ln(x+2)}{x+2} dx$	20.	$\int_{1,2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 0{,}36}}$	21.	$\int_{1,2}^{1,8} \frac{\ln(x+3)}{x+3} dx$
22.	$\int_{0,6}^{1,4} \frac{\cos x}{\sin x + 4} dx$				

Методика виконання роботи.

Завдання 1.

- Знайти крок інтегрування. Знайти значення підінтегральної функції у отриманих точках інтервалу інтегрування, згідно до обраної формули.
- Обчислити наближене значення інтегралу .

Завдання 2.

- Знайти крок інтегрування за правилом Рунге. Знайти значення підінтегральної функції у отриманих точках інтервалу інтегрування.
- Обчислити наближене значення інтегралу .

Завдання 3.

- Знайти крок інтегрування. Знайти значення підінтегральної функції у отриманих точках інтервалу інтегрування.
- Обчислити наближене значення інтегралу .
- Обчислити наближене значення інтегралу з подвійним кроком.
- За методом Рунге обчислити точність отриманого результату.

Контрольні питання

1. Поняття визначеного інтеграла та його геометричний зміст.
2. У чому полягає суть методів числового інтегрування функцій?
3. Опишіть формули прямокутників (лівих, середніх, правих) та надайте їх геометричну інтерпретацію.
4. Опишіть формулу трапецій та надайте їх геометричну інтерпретацію.
5. Опишіть формулу Сімпсона.
6. Як оцінюється похибки наближеного обчислення інтегралів за методом Рунге?
7. Як знайти величину кроку числового інтегрування при заданій точності обчислень?

Лабораторна робота № 6

Тема: «Апроксимація функцій».

Мета роботи: Навчитися будувати інтерполяційний многочлен Лагранжа, апроксимувати функцію методом найменших квадратів та використовувати отримані навички при розв'язанні прикладних задач.

Теоретичні відомості.

Апроксимація, чи наближення – науковий метод, який полягає в заміні одних об'єктів іншими, в тому чи іншому сенсі близькими до вхідних, але більш простими.

Інтерполяція за визначенням припускає знаходження проміжних значень величини заданих таблицею або графіком по деяким її значенням. Щодо функціональної залежності вона є одним з основних видів точкової апроксимації. Суть інтерполяції в даному випадку полягає в наступному:

Нехай функція f (x) визначена на відрізку [a, b], на якому повинна бути забезпечена близькість f (x) і F (x). На даному відрізку вибирається система точок, які називаються вузлами, за правилом:

$$a \le x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le b. \qquad (6.1)$$

Відомі значення функції f(x) в цих вузлах, тобто

$y_i = f(x_i)$, $\quad i = \overline{0,n}.$ або

x_i	x_0	x_1	…	x_n
$f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	…	$f(x_n)$

Задача інтерполяції зводиться до підбору многочлена згідно (6.1) виду:

$$F(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_{n-1} x + c_n = \sum_{k=0}^{n} c_k x^{n-k}, \qquad (6.2)$$

З дійсними коефіцієнтами c_k, знайденими за правилом:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k x_i^{n-k} = f(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0,n}., \qquad (6.3)$$

Тобто значення вхідної функції f (x) і апроксимуючої функції F (x) у вузлах інтерполяції обов’язково співпадають:

$$f(x_i) = F(x_i).$$

Такий многочлен називають інтерполяційним многочленом. Розглянемо побудову одного з інтерполяційних многочленів, а саме, інтерполяційного многочлена Лагранжа.

Інтерполяційний многочлен Лагранжа.

Многочлен Лагранжа шукаємо у виді лінійної комбінації з значень f(x) у вузлах інтерполяції та спеціально побудованих з системи вузлів інтерполяції многочленів n-ой степені у виді:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \ldots + y_n l_n(x), \text{ де.} \qquad (6.4)$$

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)},$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)},$$

. . .

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

. . .

$$l_n(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})}$$

Або в іншій формі

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{6.5}$$

При заміні функції інтерполяційним многочленом необхідною умовою є проходження інтерполяційного многочлена через значення функції у вузлах інтерполяції. У разі використання експериментальних залежностей, значення функції у вузлах отримані з певною похибкою (часто досить великою), тому недоцільно вдаватися до інтерполяції, змушуючи інтерполяційний поліном повторювати та накопичувати ці помилки. В цьому випадку краще скористатися апроксимацією, тобто підбором функції, яка близько проходить від заданих точок, заздалегідь визначивши критерії «близькості». Зазвичай така функція називається емпіричною формулою.

Побудова емпіричних формул складається з 2-х етапів:

1) побудова їх загального виду;

2) визначення найкращих значень параметрів, що містяться в них.

1. Загальний вигляд визначається з фізичних міркувань. Якщо характер залежностей невідомий, то формули вибираються довільно, погодившись з їх простотою. Спочатку вони вибираються з геометричних міркувань серед найпростіших функцій.

2. Якщо емпіричні формули підібрані, то вони представляються в загальному виді:

$$y = \varphi(x, a_0, a_1, \ldots, a_m); \tag{6.6}$$

φ – відома функція; a_i – невідомі коефіцієнти, які й підбираються для кращого наближення

Тоді відхилення (нев’язка) визначаються:

$$\varepsilon_i = \varphi(x_i, a_0, a_1, \ldots, a_m) - y_i; \qquad i = \overline{0, n}. \tag{6.7}$$

Задача знаходження a_i зводиться до мінімізації ε_i. Існує декілька способів. Розглянемо метод найменших квадратів.

Метод найменших квадратів

В даному випадку мова йде про середньоквадратичне наближення функції, що апроксимується за допомогою многочлена:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m, \tag{6.8}$$

де параметри a_0, a_1, …, a_m визначаються з умови

$$\min_{\bar{a}} \sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i, \bar{a})]^2 . \qquad (6.9)$$

В цьому і складається метод найменших квадратів (МНК).

Розглянемо випадок **лінійної емпіричної формули**. Припустимо, що емпірична формула має вид $\varphi(x) = ax + b$. Тоді невідомі параметри a і b знаходяться, розв'язуючи систему рівнянь:

$$\begin{cases} M_{x^2} \cdot a + M_x \cdot b = M_{xy} \\ M_x \cdot a + b = M_y \end{cases} \qquad (6.10)$$

, де $\mathbf{M}_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$; $\mathbf{M}_y = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$; $\mathbf{M}_{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}$; $\mathbf{M}_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n}$

Подібно до наведених прикладів, можна знайти формули для обчислення параметрів будь-якої емпіричної формули, проте система може виявитися важкою для вирішення. Один із способів вирішення виникаючих труднощів полягає в "лінеаризації" емпіричної формули, тобто приведення емпіричної формули до лінійного вигляду.

Приклади:

1. Нехай $y = bx^a$. Прологарифмуємо ліву та праву частини рівності: $lny = \ln b + alnx$. Позначимо $V = lny$; $U = lnx$; $\beta = lnb$, тоді попередня формула запишеться у виді: $V = aU + \beta$. Отримали лінійну залежність V від U. Замінюючи дані x_i та y_i на $U_i = ln(x_i)$ и $V_i = ln(y_i)$ знаходимо a та $b = e^{\beta}$.

2. Нехай $y = \frac{x}{ax+b}$. Для лінеаризації емпіричної формули перепишемо це рівняння у виді $\frac{x}{y} = ax + b$. Положимо $\mathrm{V} = \frac{x}{y}$, получимо лінійну залежність $\mathrm{V} = ax + b$ та використовуючи випадок лінійної емпіричної формули знаходимо шукані значення параметрів a та b.

Для найбільш поширених формул, що використовуються для апроксимації, розроблені спеціальні таблиці лінеаризації. У загальному вигляді нехай лінійна емпірична формула має вигляд $\mathrm{y}' = \mathrm{a}'\mathrm{x}' + \mathrm{b}'$. У наступній таблиці наведено деякі перетворення, що призводять нелінійну формулу до лінійної:

Формула φ(x)	x'	y'	a'	b'
a + bx	x	y	a	b
1/(a + bx)	x	1/y	a	b
a + b/x	1/x	y	a	b
x/(a + bx)	x	x/y	a	b

$a\cdot b^x$	x	lg y	10^a	10^b
$a\cdot e^{b/x}$	1/x	lny	e^a	b
a + b lg x	lg x	y	a	b
$a + bx^n$	x^n	y	a	b
a/(x+b)	x	1/y	b/a	1/a

Користуватися цією таблицею можна наступним чином: обирається певна емпірична формула, таблиця вихідних даних перераховується у відповідності з 2-й і 3-й колонками (тобто x'=**…**, y'=**…**), потім знаходяться параметри a' і b' лінійної формули і здійснюється зворотний перехід по 4-й і 5-й колонкам.

Щоб обрати відповідну емпіричну формулу необхідно враховувати наступні рекомендації.

Лінійну емпіричну формулу використовуйте для створення прямої лінії, яка найкращим чином описує простий лінійний набір даних. Вона застосовується у випадках, коли точки даних розташовані близько до прямої. Інакше кажучи, лінійна емпірична формула добре підходить для величини, яка зростає або убуває з постійною швидкістю.

Логарифмічна емпірична формула корисна для опису величини, яка спочатку швидко зростає чи убуває, а потім поступово стабілізується. Логарифмічна емпірична формула може використовувати від'ємні і додатні значення даних.

Поліноміальна емпірична формула корисна для опису величин, поперемінно зростаючих і відбувають. Наприклад, при аналізі великого набору даних про нестабільну величиною. Ступінь полінома визначається кількістю екстремумів (максимумів і мінімумів) кривої. Зазвичай поліном другого ступеня має тільки один екстремум, поліном третього ступеня - один або два екстремуми, а поліном четвертого ступеня - до трьох екстремумів.

Степенева емпірична формула корисна для відображення залежності, яка міститься в даних, і характеризується постійною швидкістю росту. Прикладом такої залежності може служити прискорення гоночного автомобіля за кожен інтервал часу, рівний одній секунді. Якщо в даних є нульові або від'ємні значення, то використання степеневої емпіричної формули неможливо.

Експоненціальна емпірична формула корисна, якщо швидкість зміни даних безупинно зростає. Однак для даних, які містять нульові або від'ємні значення, експонентна пряма тренду непридатна.

Індивідуальне завдання

1. На молокозавод в продовж першої години надходить V_1 літрів молока, далі погодинні надходження молока V_i , де і – година надходження наведені в таблиці 6.1.
   а) використовуючи інтерполяційний многочлен Лагранжа визначити об'єм надходжень молока через 2год 30хв.
   б) використовуючи інтерполяційний многочлен Лагранжа спрогнозувати об'єм надходжень молока через 4год.

Таблиця 6.1.

Варіант	Об'єм надходжень молока за перші 3 години		
	V_1	V_2	V_3
1	3000	3200	2800
2	2900	3100	3000
3	2600	2800	2700
4	2800	2900	3200
5	2700	2800	2600
6	3200	2700	2900
7	2500	2800	2600
8	2600	3200	2900
9	2900	2700	3200
10	2700	2800	2600
11	2900	300	3200
12	3200	3000	2900
13	2800	2600	2900
14	2600	2800	3000
15	2900	3200	2800
16	2700	3000	2900
17	2600	2800	2700
18	2800	2900	3200
19	2700	2800	2600
20	3200	2700	2900
21	2500	2800	2600
22	2600	3200	2900

2. При проведені експерименту були зняті наступні виміри (див табл 6.2.) Використовуючи метод найменших квадратів побудувати лінійну емпіричну формулу для апроксимації наведених даних.

Таблиця 6.2.

Варіант	Результати вимірів					
1	X	0,03	0,38	0,59	0,64	0,79
	У(X)	0,02	0,32	0,46	0,49	0,58
2	X	0,03	0,34	0,58	0,69	0,84
	У(X)	1,03	1,45	1,89	2,13	2,51
3	X	0,03	0,24	0,59	0,64	0,79
	У(X)	0,90	0,97	0,83	0,80	0,70
4	X	0,01	0,35	0,64	0,99	1,06
	У(X)	0,12	0,49	1,21	2,61	3,05
5	X	1,03	1,34	1,58	1,84	2,15

	У(Х)	0,02	0,29	0,45	0,60	0,76
6	Х	0,03	0,38	0,59	0,64	0,71
	У(Х)	0,23	0,37	0,55	0,59	0,65
7	Х	0,02	0,45	0,67	0,93	1,57
	У(Х)	1,04	2,45	3,81	6,42	23,10
8	Х	1,04	1,35	1,57	1,79	2,13
	У(Х)	1,01	1,16	1,25	1,33	1,45
9	Х	0,92	0,78	0,54	0,36	0,21
	У(Х)	0,39	0,45	0,58	0,69	0,81
10	Х	1,03	1,34	1,58	1,88	2,14
	У(Х)	1,99	1,10	1,16	1,23	1,28
11	Х	1,05	2,3	3,1	3,7	4,07
	У(Х)	0,62	0,38	0,25	0,16	0,11
12	Х	1,25	2,31	2,44	4,52	5,59
	У(Х)	1,24	0,83	0,76	0,25	0,0635
13	Х	1,01	1,24	1,56	1,80	2,12
	У(Х)	1,02	1,45	1,15	1,23	1,28
14	Х	1,05	2,3	3,1	3,7	4,07
	У(Х)	0,62	0,48	0,25	0,16	0,18
15	Х	1,26	2,34	2,45	4,52	5,58
	У(Х)	1,24	0,80	0,76	0,25	0,06
16	Х	1,03	2,3	3,1	3,5	4,05
	У(Х)	0,65	0,37	0,26	0,16	0,11
17	Х	1,25	2,31	2,44	4,52	5,59
	У(Х)	1,24	0,83	0,76	0,25	0,0635
18	Х	1,01	1,24	1,56	1,80	2,12
	У(Х)	1,02	1,45	1,15	1,23	1,28
19	Х	0,92	0,78	0,54	0,36	0,21

	У(Х)	0,39	0,45	0,58	0,69	0,81
20	Х	1,03	1,34	1,58	1,88	2,14
	У(Х)	1,99	1,10	1,16	1,23	1,28
21	Х	0,01	0,35	0,64	0,99	1,06
	У(Х)	0,12	0,49	1,21	2,61	3,05
22	Х	1,03	1,34	1,58	1,84	2,15
	У(Х)	0,02	0,29	0,45	0,60	0,76

3. На консервному заводі експериментально визначили залежність температури Т , ^oC, остигання соку в автоклаві пастеризації від часу t хв.. Дані занесли до таблиці (див. табл.6.3). Визначити вид апроксимації даних вимірювань, побудувати емпіричну формулу та за її допомогою знайти швидкість остигання соку в заданий момент часу 32 хв.

Таблиця 6.3.

Варіант	Т(0)	Т(10)	Т(20)	Т(30)	Т(40)	Т(50)	Т(60)	Т(70)	Т(80)
1	90	81	74	67	60	55	49	45	40
2	90	78	68	59	51	44	38	33	29
3	90	78	67	58	50	44	38	33	28
4	90	77	66	57	48	41	36	30	26
5	90	79	69	60	52	46	40	35	31
6	90	80	72	64	57	51	45	40	36
7	90	81	72	65	58	52	47	42	37
8	90	78	68	59	51	45	39	34	29
9	90	77	67	57	49	43	37	31	27
10	90	79	69	61	54	47	41	36	32
11	90	80	71	63	56	49	44	39	34
12	90	77	65	56	47	40	34	29	25
13	90	76	64	54	46	38	32	27	23
14	90	76	65	55	47	39	33	28	24
15	90	79	70	62	55	48	43	38	33
16	90	78	67	58	50	44	38	33	28
17	90	77	66	57	48	41	36	30	26

18	90	79	69	60	52	46	40	35	31
19	90	78	68	59	51	44	38	33	29
20	90	78	67	58	50	44	38	33	28
21	90	81	72	65	58	52	47	42	37
22	90	80	71	63	56	49	44	39	34

Методика виконання роботи.

Завдання 1.

- Побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа.
- Обчислити значення в вказаній проміжній точці.
- Виконати екстраполяцію, обчисливши значення інтерполяційного многочлена Лагранжа в точці, що знаходиться поза заданого відрізку. Визначити кількість точок перетину графіка з віссю Ох та відрізки, до яких вони належать абсциси цих точок.

Завдання 2.

- Заповнити таблицю:

	Значення					$\sum_{1}^{n} x_i$	$\frac{\sum_{1}^{n} x_i}{n}$
x_i							
y_i							
x_i^2							
$x_i \cdot y_i$							
y_i^2							

- Розв’язати систему (6.10).
- Скласти рівняння лінійної емпіричної функції.

Завдання 3.

- Визначити вид емпіричної формули.
- Скласти емпіричну формулу.
- Знайти значення емпіричної формули в заданій точці.

Контрольні питання

1. Яку функцію називають апроксимуючої?
2. Сформулюйте постановку задачі інтерполювання функцій та її геометричний зміст, назвіть області її застосування.
3. Опишіть інтерполяційну формулу Лагранжа.
4. Що таке емпірична формула? Які її види існують?
5. За якими рекомендаціями слід знаходити емпіричну формулу.
6. Опишіть метод найменших квадратів.

Лабораторна робота № 7

Тема: «Наближені методи рішення диференціальних рівнянь».

Мета роботи: Навчитися розв'язувати диференціальні рівняння (ДР) методами Ейлера, Рунге-Кута та використовувати отримані навички при розв'язанні прикладних задач.

Теоретичні відомості.

Розглянемо задачу Коші ДР першого порядку:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{7.1}$$

$$y(x_0) = y_0 \,. \tag{7.2}$$

Для розв'язання цієї задачі за методологією різницевих методів введемо послідовність точок $x_0, x_1, ..., x_n$ і кроки $h_i = x_{i+1} - x_i$ $(i = 0,1,..., n-1)$. В кожному з вузлів x_i замість значень функції $Y(x_i)$ вводяться числа y_i , як результат апроксимації точного рішення $y(x)$ на заданій множині точок. Функцію **y**, задану у вигляді таблиці $\{x_i, y_i\}$ називають сітковою функцією. Замінюючи значення похідної в рівнянні (7.4) відношенням кінцевих різниць (права різниця)

$$\frac{dy}{dx}(x_i;\, y)_i \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dx}(x_i;\, y)_i \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

здійснюємо перехід від диференціальної задачі (7.4), (7.5) відносно функції y(x) до різницевої задачі відносно сіткової функції

$$y_{i+1} = F(x_i, h_i, y_{i+1}, y_i, ... y_{i-k+1}), \quad i = 1,2,...; \tag{7.3}$$

$$y_0 = y(x_0). \tag{7.4}$$

Це різницеве рівняння в загальному вигляді, а конкретний вид правої частини для (7.5) залежить від способу апроксимації похідної(ліва, права чи центральна різниця). Для кожного числового методу виходить свій вид рівняння.

Найпростішими числовими методами для вирішення задачі Коші для ДР є такі методи.

1. Метод Ейлера

Цей метод заснований на розкладанні шуканої функції Y (x) в ряд Тейлора в околі вузлів сітки x = x_i (i = 0, 1, 2, …, n), в якому відкидаються всі члени, що містять похідні другого і більш високих порядків. Як правило, використовується рівномірна сітка $\Delta x = x_{i+1} - x_i = h =$ const (i = $\overline{0,n}$). Основна ітераційна формула має вид:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i); \quad i = 0,1,2,...,n-1 . \tag{7.5}$$

При i = 0, для вузла $x_1 = x_0 + h$, $\quad y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$.

Далі за ітераційною формулою (7.5)

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1);$$

$$. \; . \; .$$

$$y_n = y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1}) .$$

Для оцінки похибки при машинному розрахунку використовують подвійний перерахунок, тобто на відрізку [x_i, x_{i+1}] обчислення повторюються з кроком h/2 та похибка більш точного рішення y^*_{i+1} (при кроці h_i/2) оцінюється як різниця $\left| y^*_{i+1} - y_{i+1} \right|$.

2. Метод Рунге-Кутта

Розглянемо найбільш широко застосовувану на практиці різницеву схему, що відповідає методу Рунге-Кутта четвертого порядку.

Її ітераційна формула має вигляд:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_0^{(i)} + 2k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + k_3^{(i)}) \quad i = 0,1,2,... \tag{7.6}$$

де $\quad k_0^{(i)} = f(x_i, y_i);$

$$k_1^{(i)} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_0^{(i)}}{2} \right);$$

$$k_2^{(i)} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_1^{(i)}}{2} \right);$$

$$k_3^{(i)} = f\left(x_i + h, y_i + hk_2^{(i)} \right).$$

В наведеній розрахунковій схемі Рунге-Кутта на кожному кроці обчислення y_i необхідно 4-и рази знайти значення правої частини f(x,y) рівняння для обчислення коефіцієнтів $k_0^{(i)}; k_1^{(i)}; k_2^{(i)}; k_3^{(i)}$, тобто метод Рунге-Кутта (7.6) потребує більшого об’єму обчислень, однак це компенсується високою точністю, що дозволяє проводити розрахунки з більшим кроком.

Оцінити похибку методу складно. Найчастіше використовується груба оцінка похибки за формулою $\left|y_n^* - y(x_n)\right| \approx \dfrac{\left|y_n^* - y_n\right|}{15}$, де $y(x_n)$ - значення точного рішення рівняння (7.4) в точці x_n , а y_n^* , y_n - наближені рішення, отримані відповідно з кроком h/2 та h відповідно.

Приклади побудови математичних моделей фізичних задач.

Задача 1. Шматок металу (сталь) з температурою q градусів поміщено в піч, температура якої поступово підвищується протягом години від a до b градусів. Знайти температуру тіла на протязі t_n хвилин через кожну хвилину.

Розв'язання. Нехай t — час, незалежна змінна (хв), T(t) — температура тіла (град.), в момент часу t , $\theta(t)$ — температура пічці (град.) в момент часу t.

Початкові умови	Додаткові умови	Питання задачі
$t_0=0$ $T_0=q$ $\theta_0=a$	$\theta(t) = a + \lambda t$, де $\lambda = \dfrac{b-a}{60}$ — коефіцієнт пропорційності	$T(t_i)=?$ де $t_i = i, \quad i = \overline{1...t_n}$

Швидкість нагріву тіла пропорційна різниці температур середовища та тіла, тобто

$$\frac{dT}{dt} = k(\theta - T).$$

При заданих умовах рівняння виглядає так:

$$\frac{dT}{dt} = k(a + \lambda t - T),$$

$$T' = ka + k\lambda t - kT,$$

$$T' + kT = ka + k\lambda t$$ — лінійне диференціальне рівняння.

Для сталі k=0,46 таким чином отримали задачу Коші:

$$\begin{cases} T' = -0{,}46T + 0{,}46a + 0{,}46\lambda t \\ T(0) = q \end{cases},$$

яку можна розв'язати числовим методом на відрізку $t \in [0; t_n]$ з кроком 1.

Задача 2.

З циліндрічного сосуда з діаметром основи **a** м та висотою **H** м через отвір у дні сосуду діаметром **b** м витікає вода. Знайти рівень води в котлі впродовж $\mathbf{t_n}$ хвилин через кожну хвилину.

Розв'язання. Нехай t — час (с.), незалежна змінна, h(t) — висота стовпа рідини (м.) в момент часу t (див. рис.7.1).

Початкові умови	Додаткові умови	Питання задачі
$t_0=0$ $h_0=H$	$D=a$, $d=b$, G=10м/с^2 .	$h(t_i)=?$ де $t_i=60i, \quad i=\overline{1...t_n}$

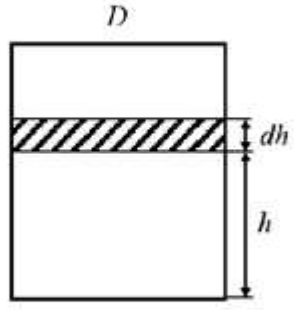

Рис. 7.1

Швидкість витікання води з резервуара визначається за формулою Торрічеллі

$$v = 0.6\sqrt{2gh}\,.$$

Обчислимо об'єм частини резервуара, що спорожніла за час dt. За цей час висота стовпа рідини зменьшиться на dh (dh<0).

Частину резервуару, що спорожніла є круговим циліндром висотою -dh та основою радіуса $\dfrac{D}{2}$ м

Об'єм цього циліндра дорівнює $V_{звільн.частини} = -\pi\left(\dfrac{D}{2}\right)^2 dh$.

Об'єм рідини, що витече за час dt дорівнює $V_{рідини\,вит.} = \underbrace{\pi\left(\dfrac{d}{2}\right)^2}_{\text{площа отвору}} \underbrace{0.6\sqrt{2gh}dt}_{\text{переміщення рідини, що витікає}}$

Оскільки ці величини рівні, складаємо рівняння

$$-\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 dh = 0.6\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \sqrt{2gh}dt$$

$$\text{або } \frac{dh}{dt} = -\frac{0.6d^2\sqrt{2gh}}{D^2}\,.$$

Таким чином отримали задачу Коші:

$$\begin{cases} h' = -\dfrac{0.6d^2\sqrt{2gh}}{D^2}, \\ h(0) = H \end{cases}$$

яку можна розв'язати числовим методом на відрізку $t \in [0;60\ t_n]$ з кроком 60.

Задача 3.

У дні котла, що має форму півкулі радіусом **a** м, утворився отвір площею **b** м^2. Знайти рівень води в котлі впродовж **t_n** хвилин через кожні 10 секунд.

Розв'язання. Нехай t — час (с.), незалежна змінна, h(t) — висота стовпа рідини (м.) в момент часу t (див. рис.7.2).

Початкові умови	Додаткові умови	Питання задачі
$t_0=0$ $h_0=a$	$R=a$, $S=b$	$h(t_i)=?$ де $t_i=10i,\quad i=\overline{1...6t_n}$

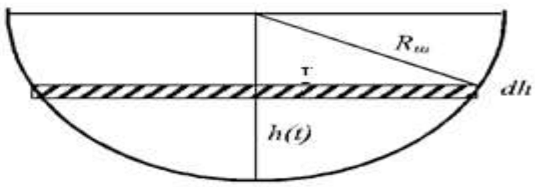

Рис.7.2

Швидкість витікання води з резервуара визначається за формулою Торрічеллі

$$v = 0.6\sqrt{2gh}\ .$$

Обчислимо обєм частини резервуара, що спорожніла за час dt. За цей час висота стовпа рідини зменьшиться на dh (dh<0).

Частину резервуару, що спорожніла будемо вважати круговим циліндром висотою -dh та основою радіуса R м, який знайдемо за теоремою Піфагора.

$$r=\sqrt{R^2-(R-h)^2}=\sqrt{R^2-R^2+2Rh-h^2}=\sqrt{2Rh-h^2}\ .$$

Об'єм цього циліндра дорівнює $V_{звільн.частини}=-\pi r^2 dh=-\pi\left(2Rh-h^2\right)dh$.

Об'єм рідини, що витече за час dt дорівнює $V_{рідини\,вит.}=0.6b\sqrt{2gh}dt$

Оскільки ці величини рівні, складаємо рівняння

$$-\pi\left(2Rh-h^2\right)dh=0.6b\sqrt{2gh}dt$$

$$\text{або}\quad \frac{dh}{dt}=-\frac{0.6b\sqrt{2gh}}{\pi\left(2Rh-h^2\right)}.$$

Таким чином отримали задачу Коші:

$$\begin{cases} h' = -\dfrac{0.6b\sqrt{2gh}}{\pi\left(2Rh - h^2\right)}, \\ h(0) = a \end{cases}$$

яку можна розв'язати числовим методом на відрізку $t \in [0;\ 60t_n]$ з кроком 10.

Індивідуальне завдання

I. Розв'язати задачу Коші (табл. 7.1) методом Ейлера на вказаному відрізку з кроком $h = 0{,}1$.

II. Розв'язати задачу Коші (табл. 7.1) методом Рунге-Кута четвертого порядку на вказаному відрізку з кроком $h = 0{,}1$.

III. В одній координатній площині побудувати графіки функцій, отриманих в завданнях I-III. Порівняти результати.

IV. Розв'язати прикладну задачу (табл. 7.2), використовуючи числові методи рішення ДР.

Таблиця 7.1.

Варіант	**Задача Коші**	**Відрізок**
1.	$y' = 3x^2 - y\ ,\quad y(0) = 1$	$x \in [0;1]$
2.	$y' = 6x^2 + y\ ,\quad y(1) = 0$	$x \in [1;2]$
3.	$y' = 2x^2 - y\ ,\quad y(0) = 1$	$x \in [0;1]$
4.	$y' = x^2 + 2y\ ,\quad y(1) = 0$	$x \in [1;2]$
5.	$y' = x^2 - 2y\ ,\quad y(1) = 0$	$x \in [1;2]$
6.	$y' = 5x^2 + y\ ,\quad y(0) = 1$	$x \in [0;1]$
7.	$y' = 4x^2 - y\ ,\quad y(1) = 0$	$x \in [1;2]$
8.	$y' = x^2 + 4y\ ,\quad y(1) = 0$	$x \in [1;2]$
9.	$y' = x^2 - 3y\ ,\quad y(1) = 0$	$x \in [1;2]$
10.	$y' = x^2 + 6y\ ,\quad y(0) = 1$	$x \in [0;1]$
11.	$y' = 2x^2 - 2y\ ,\quad y(1) = 0$	$x \in [1;2]$
12.	$y' = 6x^2 + y\ ,\quad y(1) = 0$	$x \in [1;2]$
13.	$y' = x^2 - 4y\ ,\quad y(0) = 1$	$x \in [0;1]$
14.	$y' = 8x^2 + y\ ,\quad y(1) = 0$	$x \in [1;2]$
15.	$y' = x^2 - 6y\ ,\quad y(0) = 1$	$x \in [0;1]$
16.	$y' = 6x^2 - y\ ,\quad y(1) = 0$	$x \in [1;2]$
17.	$y' = 2x^2 - y\ ,\quad y(0) = 1$	$x \in [0;1]$
18	$y' = x^2 + 2y\ ,\quad y(1) = 0$	$x \in [1;2]$
19.	$y' = 5x^2 + y\ ,\quad y(0) = 1$	$x \in [0;1]$
20.	$y' = 4x^2 - y\ ,\quad y(1) = 0$	$x \in [1;2]$

21.	$y' = x^2 - 3y$, $y(1) = 0$	$x \in [1;2]$
22.	$y' = x^2 + 6y$, $y(0) = 1$	$x \in [0;1]$

Таблиця 7.2

Варіант	Задача
1.	Шматок металу (сталь) з температурою **120**^{0} С поміщено в піч, температура якої поступово підвищується протягом години від **800**^{0} С до **1000**^{0} С. Знайти температуру тіла на протязі 20 хвилин через кожну хвилину.
2.	З циліндрічного сосуда з діаметром основи **1,9** м та висотою **3** м через отвір у дні сосуду діаметром **0,01** м витікає вода. Знайти рівень води в котлі впродовж **20** хвилин через кожну хвилину.
3.	У дні котла, що має форму півкулі радіусом **2,2** м, утворилася пробоїна площею **0,01** м^2. Знайти рівень води в котлі впродовж **2** хвилин через кожні 10 секунд.
4.	Шматок металу (сталь) з температурою **80**^{0} С поміщено в піч, температура якої поступово підвищується протягом години від **500**^{0} С до **800**^{0} С. Знайти температуру тіла на протязі **30** хвилин через кожну хвилину.
5.	З циліндрічного сосуда з діаметром основи **2** м та висотою **3,2** м через отвір у дні сосуду діаметром **0,02** м витікає вода. Знайти рівень води в котлі впродовж **18** хвилин через кожну хвилину.
6.	У дні котла, що має форму півкулі радіусом **2** м, утворилася пробоїна площею **0,01** м^2. Знайти рівень води в котлі впродовж **2** хвилин через кожні 10 секунд.
7.	Шматок металу (сталь) з температурою **60**^{0} С поміщено в піч, температура якої поступово підвищується протягом години від **400**^{0} С до **1000**^{0} С. Знайти температуру тіла на протязі 15 хвилин через кожну хвилину.
8.	З циліндрічного сосуда з діаметром основи **1,8** м та висотою **2,8** м через отвір у дні сосуду діаметром **0,01** м витікає вода. Знайти рівень води в котлі впродовж **22** хвилин через кожну хвилину.
9.	У дні котла, що має форму півкулі радіусом **2,5** м, утворилася пробоїна площею **0,02** м^2. Знайти рівень води в котлі впродовж **2** хвилин через кожні 10 секунд.
10.	Шматок металу (сталь) з температурою **40**^{0} С поміщено в піч, температура якої поступово підвищується протягом години від **200**^{0} С до **1000**^{0} С. Знайти температуру тіла на протязі **20** хвилин через кожну хвилину.
11.	З циліндрічного сосуда з діаметром основи **2,2** м та висотою **4** м через отвір у дні сосуду діаметром **0,05** м витікає вода. Знайти рівень води в котлі впродовж **24** хвилин через кожну хвилину.
12.	У дні котла, що має форму півкулі радіусом **3** м, утворилася пробоїна площею **0,015** м^2. Знайти рівень води в котлі впродовж **3** хвилин через кожні 10 секунд.
13.	Шматок металу (сталь) з температурою **50**^{0} С поміщено в піч, температура

	якої поступово підвищується протягом години від **300**^{0} С до **900**^{0} С. Знайти температуру тіла на протязі **20** хвилин через кожну хвилину.
14.	З циліндрічного сосуда з діаметром основи **2** м та висотою **4,2** м через отвір у дні сосуду діаметром **0,02** м витікає вода. Знайти рівень води в котлі впродовж **26** хвилин через кожну хвилину.
15.	У дні котла, що має форму півкулі радіусом **3,2** м, утворилася пробоїна площею **0,012** м^2. Знайти рівень води в котлі впродовж **2** хвилин через кожні 10 секунд.
16.	Шматок металу (сталь) з температурою **40**^{0} С поміщено в піч, температура якої поступово підвищується протягом години від **200**^{0} С до **1000**^{0} С. Знайти температуру тіла на протязі **20** хвилин через кожну хвилину.
17.	З циліндрічного сосуда з діаметром основи **2,2** м та висотою **4** м через отвір у дні сосуду діаметром **0,05** м витікає вода. Знайти рівень води в котлі впродовж **24** хвилин через кожну хвилину.
18.	З циліндрічного сосуда з діаметром основи **2** м та висотою **3,2** м через отвір у дні сосуду діаметром **0,02** м витікає вода. Знайти рівень води в котлі впродовж **18** хвилин через кожну хвилину.
19.	У дні котла, що має форму півкулі радіусом **2** м, утворилася пробоїна площею **0,01** м^2. Знайти рівень води в котлі впродовж **2** хвилин через кожні 10 секунд.
20.	З циліндрічного сосуда з діаметром основи **1,9** м та висотою **3** м через отвір у дні сосуду діаметром **0,01** м витікає вода. Знайти рівень води в котлі впродовж **20** хвилин через кожну хвилину.
21.	Шматок металу (сталь) з температурою **60**^{0} С поміщено в піч, температура якої поступово підвищується протягом години від **400**^{0} С до **1000**^{0} С. Знайти температуру тіла на протязі 15 хвилин через кожну хвилину.
22.	З циліндрічного сосуда з діаметром основи **1,8** м та висотою **2,8** м через отвір у дні сосуду діаметром **0,01** м витікає вода. Знайти рівень води в котлі впродовж **22** хвилин через кожну хвилину.

Методика виконання роботи.

Завдання 1.

- За ітераційною формулою 7.5 знайти наближені значення шуканої функції на заданому відрізку з вказаним кроком.
- Результати занести до таблиці:

i – номер вузла сітки	x_i	y_i	$f(x_i; y_i)$
0			

Завдання 2.

- За ітераційною формулою 7.6 знайти наближені значення шуканої функції на заданому відрізку з вказаним кроком.
- Результати занести до таблиці:

i – номер вузла сітки	x_i	y_i	$k_0^{(i)}$	$k_1^{(i)}$	$k_2^{(i)}$	$k_3^{(i)}$
0						

Завдання 3.

- В прямокутній системі координат побудувати графік частинного розв’язку ДР у вузлах сітки, та отриманні в завданнях 2-3 наближені значення частинного розв’язку.
- Зробити висновок про точність обчислень наближеними методами.

Завдання 4.

- Побудувати математичну модель задачі у вигляді задачі Коші ДР першого порядку.
- Знайти наближені значення частинного розв’язку задачі Коші методом Ейлера чи методом Рунге-Кутта.

Контрольні питання

1. Поняття диференціального рівняння (геометричний зміст, типи, частинне і загальне рішення).
2. Сформулюйте задачу Коші для диференціального рівняння 1-го порядку.
3. У чому полягає суть чисельних методів розв'язання звичайних диференціальних рівнянь?
4. У якій формі виходить наближене рішення диференціального рівняння за числовими методами?
5. Опишіть метод Ейлера.
6. Опишіть метод Рунге-Кутта 4-го порядку.

Лабораторна робота № 8

Тема: «Рішення рівнянь в частинних похідних методом кінцевих різниць».

Мета роботи: Навчитися розв’язувати рівняння в частинних похідних на прикладі рівняння теплопровідності.

Теоретичні відомості.

Розглянемо рівняння одне з рівнянь параболічного типу – рівняння теплопровідності, що описує лінійний розподіл температури стрижню за відсутністю зовнішнього підводу енергії:

$$a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \tag{8.1}$$

Шукана функція $T = T(x,t)$ визначає розподіл температури в будь-якій точці стрижня довжиною l в будь-який момент часу t. Задані початкові умови $T(x,0) = f(x)$(розподіл температури в початковий момент часу) та крайові (граничні) умови $T(0,t) = \varphi(t), \quad T(l,t) = \psi(t)$(теплові режими на кінцях стрижня в залежності від часу). Функції $f(x),\ \varphi(t), \psi(t)$непевні. Таким чином маємо нестаціонарну (мішану) задачу:

$$\begin{cases} a^2 \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{\partial T}{\partial t} \\ T(x;0) = \mathrm{f}(x) \\ T(0;t) = \varphi(x) \\ T(\mathrm{l};t) = \psi(x) \end{cases} \tag{8.1.1}$$

Оберемо систему координат xOt і в області $0 \le x \le l\ ,\ t \ge 0$, побудуємо прямокутну сітку з кроком h по осі Ox та з кроком τ по осі Ot. Позначимо $x_m = m \cdot h, \quad t_n = n \cdot \tau, \quad T_{m,n} = T(x_m;t_n)$, та систему вузлів: $(m,n),\ (m+1,n),\ (m,n+1)$, $(m-1,n)$. Використовуючи один з наборів формул, що виражають похідні через кінцеві різниці, наприклад формули (8.5), апрксимуємо рівняння (8.6) кінцево різницевим рівнянням:

$$a^2 \frac{T_{m+1\,n} - 2T_{m\,n} + T_{m-1\,n}}{\mathrm{h}^2} = \frac{T_{m\,n+1} - T_{m\,n}}{\tau}.$$

В задачах типу, що розглядаються співвідношення між величинами h и τ може суттєво впливати на точність обчислень. Нехай $\mu h^2 = \tau$, де μ - додатний числовий множник, менший за одиницю.

Рівняння

$$a^2 \frac{T_{m+1\,n} - 2T_{m\,n} + T_{m-1\,n}}{\mathrm{h}^2} = \frac{T_{m\,n+1} - T_{m\,n}}{\mu \mathrm{h}^2}$$

після перетворень прийме вигляд

$$T_{mn+1} = \mu a^2 T_{m+1\,n} + (1 - 2a^2)T_{m\,n} + a^2 T_{m-1\,n} \tag{8.2}$$

Якщо в умові задані кроки h и τ, то наближені рішення задачі (8.6.1) знаходимо за формулою (8.7).

Можна довести, що у випадку розв'язання даної задачі для спрощення можна прийняти $\mu = \dfrac{1}{6}$, тоді формула (8.7) приймає вид:

$$T_{mn+1} = \frac{1}{6}\left[a^2 T_{m+1\,n} + 2(3 - a^2)T_{m\,n} + a^2 T_{m-1\,n}\right] \tag{8.3}$$

Індивідуальне завдання

Розв'язати задачу згідно варіанту за даними, вказаними в табл. 8.1.

Процес передачі тепла в стрижні описується рівнянням теплопровідності

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = Q,$$

де ρ та C – щільність та теплоємність речовини, λ - коефіцієнт теплопровідності, Q - щільність потоку джерела тепла.

Розрахуйте процес зміни температурного розподілу T(x, t) тепла в стрижні з вказаного металу. Довжина стрижня L=1м. Значення температури на лівому та правому кінцях стрижня відповідно T(0, t)=100^{o}C та T(L, t)=200 ^{o}C. При умові, що температура стрижня в початковий момент часу дорівнює T(x,0)=100^{o}C і t $t \in [0; 0{,}1]$ (год). Зовнішні та внутрішні джерела тепла відсутні: Q=0.

Таблиця 8.1

Параметр / Варіант	Метал	ρ, кг/м^3	C_p, Дж/(кг·К)	λ, Вт/(м·К)
1	Ag	$10{,}5 \cdot 10^3$	250	427
2	Al	$2{,}7 \cdot 10^3$	920	237
3	Au	$19{,}3 \cdot 10^3$	130	317
4	Pb	$11{,}3 \cdot 10^3$	140	35,3
5	Cr	$7{,}15 \cdot 10^3$	460	93,7
6	Cu	$8{,}96 \cdot 10^3$	400	401
7	Fe	$7{,}87 \cdot 10^3$	460	80,2
8	Pt	$21{,}5 \cdot 10^3$	134	71,6
9	Sb	$6{,}68 \cdot 10^3$	205	24,3
10	Mn	$7{,}3 \cdot 10^3$	481	7,87
11	Mo	$10{,}2 \cdot 10^3$	255	138
12	Ni	$8{,}90 \cdot 10^3$	500	9,7
13	Ti	$4{,}51 \cdot 10^3$	611	21,9
14	W	$19{,}3 \cdot 10^3$	134	174
15	Zn	$7{,}14 \cdot 10^3$	400	116
16	Fe	$7{,}87 \cdot 10^3$	460	80,2
17	Pt	$21{,}5 \cdot 10^3$	134	71,6
18	Sb	$6{,}68 \cdot 10^3$	205	24,3

19	Ni	$8{,}90 \cdot 10^3$	500	9,7
20	Ti	$4{,}51 \cdot 10^3$	611	21,9
21	Au	$19{,}3 \cdot 10^3$	130	317
22	Pb	$11{,}3 \cdot 10^3$	140	35,3

Методика виконання роботи.

Завдання 1.

- Привести рівняння до виду 8.1.
- За формулою $\mu h^2 = \tau$ знайти крок τ, враховуючи, що $h = 0{,}1$ та $\mu = \frac{1}{6}$.
- За ітераційною формулою 8.3 знайти наближені значення шуканої функції T(x, t) у вузлах сітки
- Результати занести до таблиці:

x_i / τ_j	x_0	x_1	…	x_m
τ_0				
τ_1				
…				
τ_n				

Контрольні питання

1. Опишіть рівняння теплопровідності, що описує лінійний розподіл температури стрижню за відсутністю зовнішнього підводу енергії та поясніть фізичну сутність початкових умов та крайових умов.
2. В чому полягає ідея метода кінцевих різниць при розвязанні диференціальних рівнянь в частинних похідних.
3. У якій формі знаходять наближене рішення диференціального рівняння в частинних похідних за числовими методами?
4. Опишіть кінцево різницеве рівнянням, що відповідає рівнянню теплопроводності.
5. Як потрібно обирати кроки h та τ, щоб отримати необхідну точність обчислень.

Лабораторна робота № 9

Тема: «Оптимізація функцій однієї змінної».

Мета роботи: Навчитися знаходити мінімум функції однієї змінної методами рівномірного перебору та методом золотого перерізу.

Теоретичні відомості

Метод рівномірного перебору

Нехай необхідно знайти мінімум функції $f(x)$ на деякому інтервалі $[a;b]$. Якщо про функцію $f(x)$ на цьому інтервалі немає інформації про її властивості, то для пошуку мінімуму на $[a;b]$ можна застосувати найпростіший метод рівномірного перебору, або , інакше, загального пошуку.

В цьому методі інтервал $[a;b]$ ділиться на декілька n рівних частин з наступним обчисленням значень функції у $n+1$ вузлах отриманої сітки. В якості мінімуму приймається абсциса з мінімальним обчисленим значенням функції (рис 9.1).

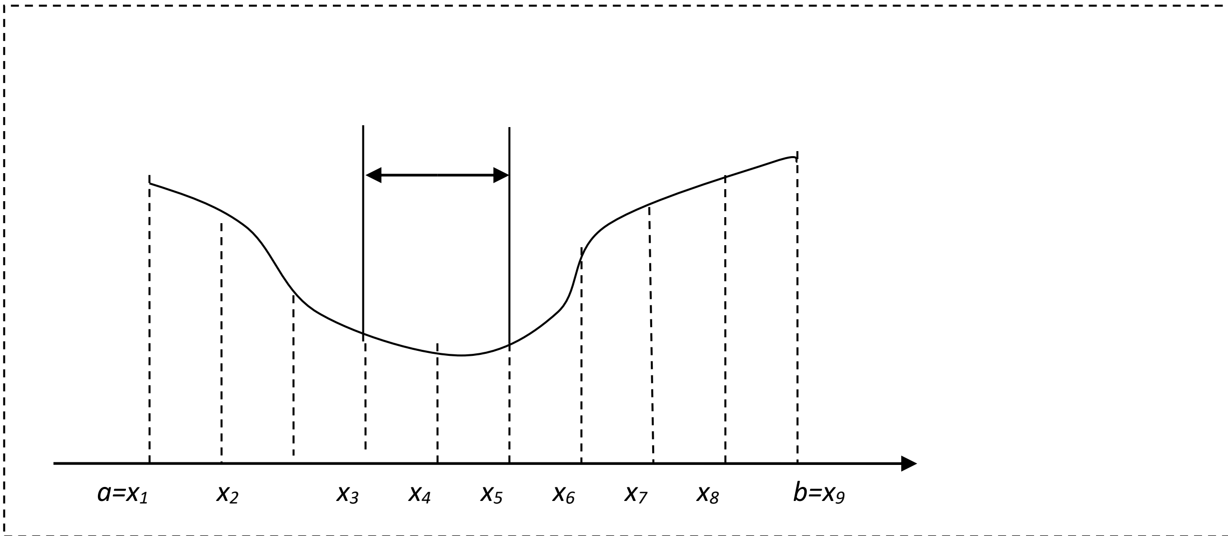

Рис.9.1

В результаті інтервал невизначеності звужується до двох кроків сітки. Щоб отримати більш точне значення, необхідно розбити $[a;b]$ на достатньо велику кількість інтервалів, але при цьому збільшується кількість обчислень.

Для знаходження раціонального значення кроку можна використовувати умову Ліпшиця, а саме, знаходимо константу Ліпшиця з умови $\left|f'(x)\right|_{x\in[a;b]} \le L$, тоді крок $h = \dfrac{b-a}{n}$ знаходимо за умовою $h \le \dfrac{2\varepsilon}{L}$, де ε - точність знаходження мінімуму функції.

Опишемо алгоритм пошуку мінімуму функції $f(x)$ на інтервалі $[a;b]$ методом рівномірного перебору з кроком h.

Крок 1. Присвоюємо x^* та x значення лівого кінця відрізку: $x^* := a$, $x := a$ і f_{min}:=f(a).

Крок 2. Обчислюємо значення наступної точки $x := x + h$.

Крок 3. Перевіряємо якщо $f(x) \leq f(a)$, то $x^* := x$ та f_{min}:=f(x). Інакше знову повертаємось на крок 2. Процедура закінчується, коли x>b.

В результаті отримуємо точку мінімуму x^* та $f_{min.}$ - мінімум функції на відрізку $[a; b]$

Унімодальні функції

Більш ефективні методи можна побудувати, якщо припустити, що функція має на інтервалі, що розглядається тільки один мінімум. Точніше: припустимо, що на інтервалі $[a; b]$ є тільки одне значення x^* таке, що $f(x^*)$ - мінімум $f(x)$ на $[a; b]$ та, що $f(x)$ строго спадає для $x \leq x^*$ та строго зростає для $x^* \geq x$. Така називається унімодальною.

Зауважимо, що унімодальна функція не обов'язково має бути неперервною. Далі будемо вважати функцію, що досліджується унімодальною.

Метод золотого перерізу

Нехай відрізок $[a; b]$ розбитий на дві частини точкою x. Будемо говорити, що точка x робить золотий переріз відрізку, якщо відношення довжини усього відрізка до довжини більшої його частини дорівнює відношенню довжини більшої частини до меншої:

$$\frac{b-a}{x-a} = \frac{x-a}{b-x}.$$

Зазначене відношення дорівнює τ=1,618, а 1/τ=0,62. Можна показати, що золотий переріз відрізку $[a; b]$ утворюють дві симетрично (щодо центра відрізка) розташовані точки (рис.9.2):

$$\begin{cases} x_1 = a + \dfrac{b - a}{\tau} \\ x_2 = b - \dfrac{b - a}{\tau} \end{cases} \tag{9.1}$$

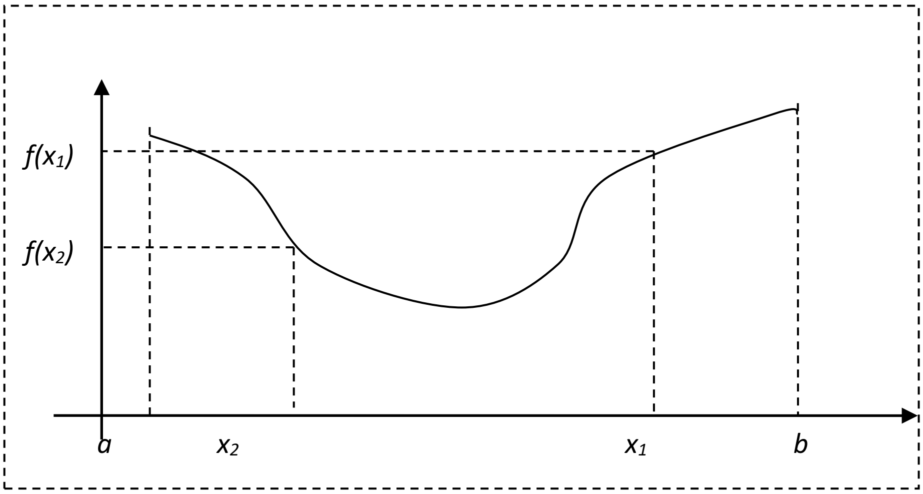

рис. 9.2

При цьому точка x_1 робить золотий переріз відрізку $[x_2; b]$, а точка x_2 - відрізку $[a; x_1]$.

Опишемо алгоритм пошуку мінімуму функції $f(x)$ на інтервалі методом золотого перерізу з точністю ε.

Крок 1. Для заданого початкового відрізка $[a; b]$ за формулами (9.1) обчислюємо x_1 і x_2.

Крок 2. Знаходимо значення функції $f(x)$ у цих точках $f(x_1)$ і $f(x_2)$. З властивості унімодальної функції випливає, що якщо $f(x_1) < f(x_2)$ то точка мінімуму належить відрізку $[x_2; b]$, а якщо $f(x_1) > f(x_2)$, то точка мінімуму належить відрізку $[a; x_1]$ (див на рис. 9.2)

Крок 3. Звужуємо відрізок $[a; b]$, зробивши пере присвоювання $a := x_2$ – у першому випадку ($f(x_1) < f(x_2)$ і $b := x_1$ – у другому випадку ($f(x_1) > f(x_2)$).

Крок 4. Перевіряємо умову |b-a|<ε , де ε – точність обчислень. Якщо умова виконана, то точність досягнута, обчислювальна процедура закінчується і за точку мінімуму беремо середину відрізку $[a; b]$, тобто $x^* = \frac{b-a}{2}$, інакше переходимо на крок 1. При цьому слід зауважити, що за формулою (9.1) обчислюємо тільки одну з точок x_1 або x_2, а саме ту яка приймала участь у пере присвоюванні.

Індивідуальне завдання

1. Знайти мінімум функції $y = f(x)$ на вказаному відрізку методом рівномірного перебору з точністю Ɛ=0,01 (варіанти вказані в таблиці 9.1).
2. Знайти мінімум функції $y = f(x)$ на вказаному відрізку методом золотого перерізу точністю Ɛ=0,01 (варіанти вказані в таблиці 9.1).

Таблиця 9.1

Варіант	$y = f(x)$	Відрізок
1	$y = e^x + x^2$	$[-1; 0]$
2	$y = e^x + 1/x$	$[0.5; 1]$
3	$y = e^x - \ln x$	$[0.3; 1]$
4	$y = e^{x-1} + 1/(x+1)$	$[0; 1]$
5	$y = tgx + 1/x$	$[0.5; 1]$
6	$y = -tgx + e^x + x$	$[-1; 0]$
7	$y = \sin x + x^2$	$[-1; 0]$
8	$y = x + 1/arctgx$	$[0.5; 1.5]$
9	$y = x + 1/\ln x$	$[1.5; 2.5]$
10	$y = e^{-x} + x^2$	$[0; 1]$
11	$y = e^{-x} - 1/x$	$[-1; -0.5]$
12	$y = e^{1/x} + \ln x$	$[1; 3]$
13	$y = e^{-x+1} - 1/(x-1)$	$[0; 0.7]$
14	$y = -tgx - 1/x$	$[-1; -0.5]$

15	$y = x^4 + 2x^2 + 4x$	$[-1; 0]$
16	$y = x + \ln^2 x$	$[0.3; 1]$

Методика виконання роботи.

Завдання 1.

- Знайти найбільше значення похідної функції на вказаному відрізку. За умовою Ліпшиця знайти крок h.
- Знайти значення функції на відрізку з знайденим кроком.
- Серед отриманих значень вибрати найменше.

Завдання 2.

- Знайти мінімум функції методо золотого перерізу .Результати заносити до таблиці:

№ ітерації	a	b	$\lvert b-a \rvert$	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$

Контрольні питання

1. Основні поняття (поняття оптимізації, керований параметр, цільова функція, типи задач оптимізації).
2. Чому в багатьох випадках при розв'язанні задачі одномірної оптимізації застосовують числові методи?
3. Опишіть метод рівномірного перебору.
4. Опишіть метод золотого перетину.

Лабораторна робота № 10

Тема: «Оптимізація функцій двох змінних».

Мета роботи: Навчитися знаходити мінімум функції двох змінних методами по координатного спуску та найскорішого спуску.

Теоретичні відомості.

Метод покоординатного спуску

Цей метод є простим методом пошуку мінімуму функції без обмежень. Розглянемо ідею методу на прикладі мінімізації функції двох змінних $f(x; y)$**,** тому що її наочно можна представити у вигляді малюнка.

Алгоритм методу покоординатного спуску.

- Оберемо початкове наближення $M^0(x^0; y^0)$, зафіксуємо y^0 і знайдемо мінімум функції однієї змінної $f(x; y^0)$ будь-яким відомим методом мінімізації функції однієї змінної. Нехай мінімум функції $f(x; y^0)$ досягається він досягається при $x = x^1$.

- Вздовж прямої паралельної до осі Ox, перемістимося в точку $M^1(x^1; y^0)$
- Фіксуємо тепер x^1 і знаходимо мінімум функції однієї змінної $f(x^1; y)$. Нехай це буде y^1.
- Рухаємося вздовж прямої, паралельної до осі Oy у точку $M^2(x^1; y^1)$.
- Далі спускаємося по прямій, паралельній осі Ox і т. д.
- Продовжуємо цей процес доти, поки функція продовжує спадати, тобто поки

$$f(x^{(k+1)}, y^{(k+1)}) < f(x^{(k)}, y^{(k)}).$$

- Як тільки функція $f(x; y)$ перестає спадати, спуск припиняють

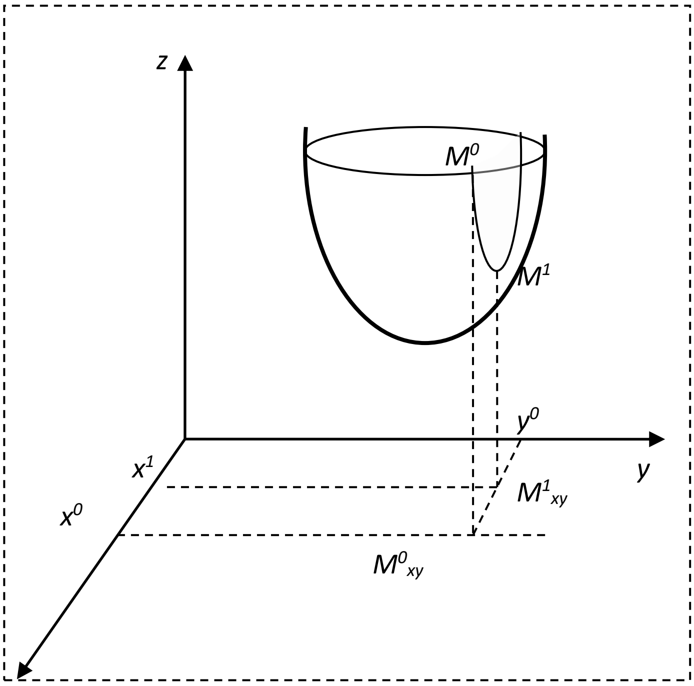

Рис. 10.1

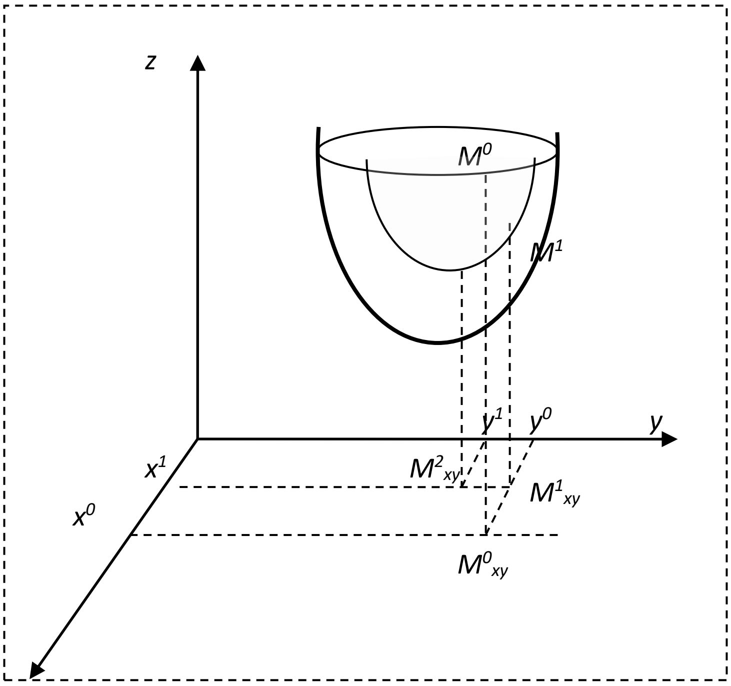

Рис. 10.2

Алгоритм покоординатного спуску працює погано, якщо має місце взаємодія між змінними (наприклад, є добуток $x \cdot y$ в цільовій функції). Через повільну збіжність методу покоординатного спуску при наявності "оврагов" у цільовій функції, його можна використовувати для знаходження першого наближення мінімуму.

Перевагою методу варто вважати його універсальність (застосовність до недиференційованих функцій), недоліком - повільна швидкодія в деяких випадках.

Метод градієнтного спуску

Для простоти викладу обмежимося задачею мінімізації функції двох змінних $z=f(x,y)$, вважаючи її диференційованою. Градієнтом функції в крапці називають вектор $(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y)$, що вказує напрямок зростання функції. Напрямок найшвидшого убування функції характеризується антиградієнтом $(-\partial f/\partial x; -\partial f/\partial y)$.

Існують різні версії методу градієнтного спуску, об'єднані загальною ідеєю: кожне наступне наближення до точки мінімуму обирають за напрямком антиградієнта, проведеним з точки, що відповідає попередньому наближенню.

Однак антиградієнт дає тільки напрямок оптимізації, але не величину кроку, на який можна пересунутися одночасно з зменшенням функції. Тому запропоновані численні модифікації методу в основному різняться правилами вибору кроку на кожній ітерації і правилами руху уздовж отриманого напрямку.

Метод найшвидшого спуску

Спуск починається з нульового наближення — точки з координатами (x°,y^o), верхній індекс при змінних позначає номер кроку. Обчислимо компоненти антиградієнта.

$$d_1=-\partial f/\partial x(x^\circ,y^o),\ d_2=-\partial f/\partial y(x^\circ,y^o)$$

Будемо вважати, що числа d_1,d_2 не дорівнюють нулю одночасно (якщо ці два числа дорівнюють 0, то точка (x°,y°) є підозрілою на екстремум, у цьому випадку запам'ятовується значення функції в ній і обирається інша точка як нульове наближення).

Оберемо деякий крок $h_1>0$ і покладемо

$$x^1 = x^\circ - h_1 d_1,$$

$$y^1 = y^\circ - h_1 d_2.$$

Будемо вважати, що крок обраний вірно, якщо $f(x^1,y^1)<f(x^\circ,y^o)$, при невиконанні цієї нерівності крок зменшується.

Зауваження. У випадку знаходження максимуму функції наступне наближення знаходимо за формулами:

$$x^1 = x^\circ + h_1 d_1,$$

$$y^1 = y^\circ + h_1 d_2$$

а умова якщо $f(x^1,y^1)>f(x^\circ,y^o)$.

Після одержання нового наближення (x^1,y^1) обчислюється антиградієнт у новій точці, будується нове наближення (x^2,y^2) і т. д. Обчислення по алгоритму продовжуються доти, поки значення кроку не стане менше деякого мінімального значення. За допомогою наведеного алгоритму можна знаходити стаціонарні точки, що у загальному випадку можуть не бути точками мінімуму. Тому для підвищення ймовірності знаходження мінімуму рекомендується робити кілька спусків з різних точок входу.

Недоліками запропонованого алгоритму є його застосовність тільки до диференційованих функцій, а також залежність від вибору масштабу змінних. Якщо функція, що мінімізується, дуже витягнута в просторі, то процедура найшвидшого спуску збігається занадто повільно чи може взагалі не збігтися за розумний час. Іноді в цьому випадку допомагає масштабування змінних. Перевагою застосування методу є його висока швидкодія у більшості випадків

Індивідуальне завдання

Завдання 1 Найти екстремум функції $f(x_1;x_2)=a_4x_1^2+a_3x_1+a_2x_2^2+a_1x_2+a_0$ методом покоординатного спуска з точністю 0,01, починаючі рух з вказаної згідно варіанту точки (дані в таблиці 10.1).

Завдання 2 Найти екстремум функції $f(x_1;x_2)=a_4x_1^2+a_3x_1+a_2x_2^2+a_1x_2+a_0$ методом найскорішого спуска з точністю 0,01, починаючі рух з вказаної згідно варіанту точки (дані в таблиці 10.1).

Таблиця 10.1

Вариант	x_1	x_2	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0	extr
1	2	3	-2	20	-1	16	0	max
2	2	4	-1	18	-1	6	0	max
3	2	7	1	-8	1	-4	0	min
4	2	2	1	2	1	-1	0	min
5	3	10	-2	32	-4	24	0	max
6	2	3	-1	20	-1	18	0	max
7	2	6	2	-32	1	-6	0	min
8	4	2	1	0	2	-6	0	min
9	0	1	-1	-2	-1	1	10	max
10	-3	6	2	-14	2	0	0	min
11	4	5	1	-3	2	2	0	min
12	3	4	2	-4	1	-4	0	min
13	4	5	-2	-14	-1	0	6	max
14	8	1	-1	-7	-1	0	0	max
15	3	6	3	0	1	-1	0	min
16	-2	3	2	-2	4	0	8	min
17	3	10	-2	32	-4	24	0	max

18	2	3	-1	20	-1	18	0	max
19	2	6	2	-32	1	-6	0	min
20	4	2	1	0	2	-6	0	min
21	0	1	-1	-2	-1	1	10	max
22	-3	6	2	-14	2	0	0	min
23	4	5	1	-3	2	2	0	min

Методика виконання роботи.

Завдання 1.

- Знайти мінімум функції методо покоординатного спуску за вказаним алгоритмом.

Завдання 2.

- Знайти мінімум функції методом найскорішого спуску. Взявши h=1 та зменшуючи крок за алгоритмом у два рази.

Контрольні питання

1. Опишіть головну ідею методів спуску в задачах оптимізації функцій двох змінних.
2. Опишіть метод покоординатного спуску.
3. Опишіть головну ідею методів градієнтного спуску в задачах оптимізації функцій двох змінних.
4. Опишіть метод найскорішого спуску.