Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

ІНДИВІДУАЛЬНІ ДОМАШНІ ЗАВДАННЯ З ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА МАТЕМАТИКА», РОЗДІЛ «ЛІНІЙНА АЛГЕБРА» ТА МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ЇХ ВИКОНАННЯ

Одеса: НУОП , 2022

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

ІНДИВІДУАЛЬНІ ДОМАШНІ ЗАВДАННЯ З ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА МАТЕМАТИКА», РОЗДІЛ «ЛІНІЙНА АЛГЕБРА» ТА МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ЇХ ВИКОНАННЯ

для здобувачів вищої освіти усіх форм навчання за спеціальністю 122 – Комп'ютерні науки та інформаційні технології

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики та
моделювання систем
Протокол №5 від 28.12.2021р.

Одеса: НУОП, 2022

Індивідуальні домашні завдання з дисципліни «Вища математика», розділ «Лінійна алгебра» та методичні вказівки до їх виконання для здобувачів вищої освіти усіх форм навчання за спеціальністю 122 – Комп'ютерні науки та інформаційні технології / Уклад.: Л.М. Колмакова, Ю.Є. Сікіраш. Одеса: НУОП, 2022. – 40 с.

Укладачі: **Колмакова Л.М.**, канд. фіз. - мат. наук, доцент
Сікіраш Ю.Є., ст. викладач

Зміст

Вступ

Ця робота складається з чотирьох розділів. Перший розділ містить десять тематично скомпонованих завдань (двадцять варіантів кожен), які можна використовувати для індивідуальних, аудиторних та модульних робіт студентів. Зразки їх розв'язань в скороченому вигляді – у третьому розділі. В другому розділі необхідний теоретичний матеріал супроводжується розширеним коментарем розв'язань дванадцяти практичних завдань. Завдання доступні студентам різних форм навчання.

Для самооцінки засвоєння теми в четвертому розділі посібника містяться більш складні задачі.

При виконанні й оформленні індивідуального домашнього завдання (ІДЗ) здобувач повинен дотримуватися правил:

а) у заголовку ІДЗ роботи повинні бути записані прізвище студента, його ініціали, номер групи, варіант;

б) роботу потрібно виконувати в окремому зошиті;

в) розв'язання задач розташовувати в порядку номерів, зазначених у завданнях, виписуючи перед розв'язанням кожної задачі її умову.

Література

1. Вища математика: Основні означення, приклади і задачі: у 2-х книгах / за ред. Кулініча Г.Л. – К.: Либідь, 1992.
2. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Ч.1 / под ред. А.П. Рябушко. – Минск. Высшая школа, 2005. – 270с.
3. Матриці. Визначники та системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Дистанційний курс з дисципліни «Вища математика» (презентація). Для студентів технічних спеціальностей дистанційної й заочної форм навчання / Укл.: Колмакова Л.М. , Кузьміна В.М.–Одеса: ОНПУ, 2017 р. -44с. Відділ технологій дистанційного навчання , рег. № 12/17 від 03.05.2017, розміщ. на ресурсі edu.opu.ua.
4. Кліх Ю.О., Плотнікова Л.І., Усов А.В., Комлєва Т.О. Лінійна алгебра та елементи аналітичної геометрії. Одеса: Астропринт, 2004.

РОЗДІЛ 1. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Варіант №1

Завдання 1.

Вивчіть, як обчислюються визначники другого порядку. Розв’яжіть рівняння 1.1., нерівність 1.2. та побудуйте графік функції 1.3.:

1.1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$;

1.2. $\begin{vmatrix} x+1 & 2x+1 \\ 3x+1 & 4x+1 \end{vmatrix} \geq 0$;

1.3. $y = \begin{vmatrix} 2 & x-1 \\ \frac{1}{x} & 1 \end{vmatrix}$.

Завдання 2.

Вивчіть правило трикутників (правило Саррюса) обчислення визначників 3-го порядку та розв’яжіть рівняння

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & x \\ 0 & 3 & -1 \\ 7 & x & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

Завдання 3.

Вивчіть правило обчислення визначників n-го порядку, властивості визначників. Для даного визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$$

3.1. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{32};

3.2. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{43};

3.3. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 3-го рядка;

3.4. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 4-го стовпця;

3.5. Обчисліть визначник, отримавши попередньо нулі у 4-му стовпці.

Завдання 4.

Вивчіть метод Крамера розв’язання СЛАР. Знайдіть розв’язок системи за формулами Крамера. Зробіть перевірку.

$$\begin{cases} 11x + 3y - z = 2; \\ 2x + 5y - 5z = 0; \\ x + y + z = 2. \end{cases}$$

Варіант №2

Завдання 1.

Вивчіть, як обчислюються визначники другого порядку. Розв’яжіть рівняння 1.1., нерівність 1.2. та побудуйте графік функції 1.3.:

1.1. $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2};$

1.2. $\begin{vmatrix} 1 & \mathrm{x}+5 \\ 2 & \mathrm{x} \end{vmatrix} < 0;$

1.3. $y = \begin{vmatrix} |x| & \frac{1}{x} \\ x^2 & 2 \end{vmatrix}.$

Завдання 2.

Вивчіть правило трикутників (правило Саррюса) обчислення визначників 3-го порядку та розв’яжіть нерівність

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1.$$

Завдання 3.

Вивчіть правило обчислення визначників n-го порядку, властивості визначників. Для даного визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

3.1. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{12};

3.2. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{32};

3.3. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 1-го рядка;

3.4. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 2-го стовпця;

3.5. Обчисліть визначник, отримавши попередньо нулі у 2-ому стовпці.

Завдання 4.

Вивчіть метод Крамера розв’язання СЛАР. Знайдіть розв’язок системи за формулами Крамера. Зробіть перевірку.

$$\begin{cases} 5x + 8y - z = -7; \\ x + 2y + 3z = 1; \\ 2x - 3y - 2z = 8. \end{cases}$$

Варіант №3

Завдання 1.

Вивчіть, як обчислюються визначники другого порядку. Розв'яжіть рівняння 1.1., нерівність 1.2. та побудуйте графік функції 1.3.:

1.1. $\begin{vmatrix} x+1 & 3 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0;$

1.2. $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14;$

1.3. $y = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{|x|} \\ -x^2 & 1 \end{vmatrix}.$

Завдання 2.

Вивчіть правило трикутників (правило Саррюса) обчислення визначників 3-го порядку та розв'яжіть рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Завдання 3.

Вивчіть правило обчислення визначників n-го порядку, властивості визначників. Для даного визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

3.1. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{12};
3.2. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{32};
3.3. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 1-го рядка;
3.4. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 2-ого стовпця;
3.5. Обчисліть визначник, отримавши попередньо нулі у 2-му стовпці.

Завдання 4.

Вивчіть метод Крамера розв'язання СЛАР. Знайдіть розв'язок системи за формулами Крамера. Зробіть перевірку.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5; \\ 2x + 3y + z = 1; \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$$

Варіант №4

Завдання 1.

Вивчіть, як обчислюються визначники другого порядку. Розв'яжіть рівняння 1.1., нерівність 1.2. та побудуйте графік функції 1.3.:

1.1. $\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \cdot x = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$;

1.3. $y = \begin{vmatrix} 2 & x+1 \\ \frac{1}{x} & 1 \end{vmatrix}$.

1.2. $\begin{vmatrix} 2x & 2x \\ 5 & x \end{vmatrix} > -12$;

Завдання 2.

Вивчіть правило трикутників (правило Саррюса) обчислення визначників 3-го порядку та розв'яжіть рівняння

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 7 & x-3 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Завдання 3.

Вивчіть правило обчислення визначників n-го порядку, властивості визначників. Для даного визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -2 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

3.1. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{12};
3.2. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{34};
3.3. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 1-го рядка;
3.4. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 4-го стовпця;
3.5. Обчисліть визначник, отримавши попередньо нулі у 4-му стовпці.

Завдання 4.

Вивчіть метод Крамера розв'язання СЛАР. Знайдіть розв'язок системи за формулами Крамера. Зробіть перевірку.

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 31; \\ 5x + y + 2z = 29; \\ 3x - y + z = 10. \end{cases}$$

Варіант №5

Завдання 1.

Вивчіть, як обчислюються визначники другого порядку. Розв’яжіть рівняння 1.1., нерівність 1.2. та побудуйте графік функції 1.3.:

1.1. $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0;$

1.2. $\begin{vmatrix} x-1 & x-2 \\ x+2 & x^2+x+1 \end{vmatrix} \geq 3;$

1.3. $y = \begin{vmatrix} 2 & -2x \\ |x|+1 & -x \end{vmatrix}.$

Завдання 2.

Вивчіть правило трикутників (правило Саррюса) обчислення визначників 3-го порядку та розв’яжіть рівняння

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2x+3 \\ 3-x & 1 & 1 \\ 2x+1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Завдання 3.

Вивчіть правило обчислення визначників n-ого порядку, властивості визначників. Для даного визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

3.1. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{22};
3.2. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{34};
3.3. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 2-го рядка;
3.4. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 4-го стовпця;
3.5. Обчисліть визначник, отримавши попередньо нулі у 4-му стовпці.

Завдання 4.

Вивчіть метод Крамера розв’язання СЛАР. Знайдіть розв’язок системи за формулами Крамера. Зробіть перевірку.

$$\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9; \\ 2x + 5y - 3z = 4; \\ 5x + 6y - 2z = 18. \end{cases}$$

Варіант №6

Завдання 1.

Вивчіть, як обчислюються визначники другого порядку. Розв'яжіть рівняння 1.1., нерівність 1.2. та побудуйте графік функції 1.3.:

1.1. $\begin{vmatrix} 2x-1 & 1+x \\ x+2 & x-1 \end{vmatrix} = -6;$

1.3. $y = \begin{vmatrix} \sqrt{x} & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}.$

1.2. $\begin{vmatrix} 2\mathrm{x} & 3 \\ -1 & \mathrm{x} \end{vmatrix} > 7;$

Завдання 2.

Вивчіть правило трикутників (правило Саррюса) обчислення визначників 3-го порядку та розв'яжіть рівняння

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ x-1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Завдання 3.

Вивчіть правило обчислення визначників n-го порядку, властивості визначників. Для даного визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

3.1. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{12};

3.2. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{33}

3.3. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 1-го рядка;

3.4. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 3-го стовпця;

3.5. Обчисліть визначник, отримавши попередньо нулі у 3-му стовпці.

Завдання 4.

Вивчіть метод Крамера розв'язання СЛАР. Знайдіть розв'язок системи за формулами Крамера. Зробіть перевірку.

$$\begin{cases} 2x - y - z = 4; \\ 3x + 4y - 2z = 11; \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$$

Варіант №7

Завдання 1.

Вивчіть, як обчислюються визначники другого порядку. Розв'яжіть рівняння 1.1., нерівність 1.2. та побудуйте графік функції 1.3.:

1.1. $\begin{vmatrix} x+3 & x-1 \\ 7-x & x-1 \end{vmatrix} = 0;$

1.2. $\begin{vmatrix} \mathrm{x} & -4 \\ 1 & 3\mathrm{x} \end{vmatrix} < 13;$

1.3. $y = \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{|x|} \\ x^2 & 1 \end{vmatrix}.$

Завдання 2.

Вивчіть правило трикутників (правило Саррюса) обчислення визначників 3-го порядку та розв'яжіть рівняння

$$\begin{vmatrix} x+2 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & x-1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Завдання 3.

Вивчіть правило обчислення визначників n-го порядку, властивості визначників. Для даного визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

3.1. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{31};
3.2. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{32};
3.3. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 3-го рядка;
3.4. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 2-го стовпця;
3.5. Обчисліть визначник, отримавши попередньо нулі у 2-му стовпці.

Завдання 4.

Вивчіть метод Крамера розв'язання СЛАР. Знайдіть розв'язок системи за формулами Крамера. Зробіть перевірку.

$$\begin{cases} x+y+2z=-1; \\ 2x-y+2z=-4; \\ 4x+y+4z=-2. \end{cases}$$

Варіант №8

Завдання 1.

Вивчіть, як обчислюються визначники другого порядку. Розв'яжіть рівняння 1.1., нерівність 1.2. та побудуйте графік функції 1.3.:

1.1. $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ -y-3 & x-2 \end{vmatrix} = 0$

1.2. $\begin{vmatrix} 5 & x \\ 2x & 2x \end{vmatrix} > -12$

1.3. $y = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & \sqrt{-x} \end{vmatrix}$

Завдання 2.

Вивчіть правило трикутників (правило Саррюса) обчислення визначників 3-го порядку та розв'яжіть нерівність

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ x+2 & 0 & 1 \\ -2 & 3-x & 1 \end{vmatrix} < 0.$$

Завдання 3.

Вивчіть правило обчислення визначників n-го порядку, властивості визначників. Для даного визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

3.1. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{32};
3.2. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{31};
3.3. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 3-го рядка;
3.4. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 1-го стовпця;
3.5. Обчисліть визначник, отримавши попередньо нулі в 1-му стовпці.

Завдання 4.

Вивчіть метод Крамера розв'язання СЛАР. Знайдіть розв'язок системи за формулами Крамера. Зробіть перевірку.

$$\begin{cases} 3x - y = 5; \\ 2x - y - z = 0; \\ 2x - y + 4z = 15. \end{cases}$$

Варіант №9

Завдання 1.

Вивчіть, як обчислюються визначники другого порядку. Розв’яжіть рівняння 1.1., нерівність 1.2. та побудуйте графік функції 1.3.:

1.1. $\begin{vmatrix} 2x+1 & 3 \\ x+5 & 2 \end{vmatrix} = 0;$

1.2. $\begin{vmatrix} 1 & 4x \\ -2x & -5 \end{vmatrix} < 11;$

1.3. $y = \begin{vmatrix} 1 & -x \\ \frac{1}{x-1} & 1 \end{vmatrix}.$

Завдання 2.

Вивчіть правило трикутників (правило Саррюса) обчислення визначників 3-го порядку та розв’яжіть рівняння

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & x \\ 0 & 3 & -1 \\ 7 & x & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

Завдання 3.

Вивчіть правило обчислення визначників n-го порядку, властивості визначників. Для даного визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

3.1. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{22};
3.2. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{34};
3.3. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 2-го рядка;
3.4. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 4-го стовпця;
3.5. Обчисліть визначник, отримавши попередньо нулі у 4-му стовпці.

Завдання 4.

Вивчіть метод Крамера розв’язання СЛАР. Знайдіть розв’язок системи за формулами Крамера. Зробіть перевірку.

$$\begin{cases} x + y - z = 0; \\ 3x - y + z = 4; \\ 2x - 5y - 3z = -17. \end{cases}$$

Варіант №10

Завдання 1.

Вивчіть, як обчислюються визначники другого порядку. Розв'яжіть рівняння 1.1., нерівність 1.2. та побудуйте графік функції 1.3.:

1.1. $\begin{vmatrix} 2x-3 & 4 \\ -x & -3 \end{vmatrix} = 0;$

1.2. $\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{x} \\ x-1 & -2 \end{vmatrix} > 0;$

1.3. $y = \begin{vmatrix} |x| & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix}.$

Завдання 2.

Вивчіть правило трикутників (правило Саррюса) обчислення визначників 3-го порядку та розв'яжіть нерівність

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1.$$

Завдання 3.

Вивчіть правило обчислення визначників n-го порядку, властивості визначників. Для даного визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -10 & 4 \\ -5 & -7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}$$

3.1. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{22};
3.2. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{33};
3.3. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 2-го рядка;
3.4. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 3-го стовпця;
3.5. Обчисліть визначник, отримавши попередньо нулі у 3-му стовпці.

Завдання 4.

Вивчіть метод Крамера розв'язання СЛАР. Знайдіть розв'язок системи за формулами Крамера. Зробіть перевірку.

$$\begin{cases} x + y + z = 2; \\ 2x - y - 6z = -1; \\ 3x - 2y = 8. \end{cases}$$

Варіант №11

Завдання 1.

Вивчіть, як обчислюються визначники другого порядку. Розв'яжіть рівняння 1.1., нерівність 1.2. та побудуйте графік функції 1.3.:

1.1. $\begin{vmatrix} x+3 & x+1 \\ x-1 & x-2 \end{vmatrix} = 0;$

1.3. $y = \begin{vmatrix} \sqrt{x^2} & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.$

1.2. $\begin{vmatrix} 3 & x-1 \\ \frac{1}{x} & 1 \end{vmatrix} > 3;$

Завдання 2.

Вивчіть правило трикутників (правило Саррюса) обчислення визначників 3-го порядку та розв'яжіть нерівність

$$\begin{vmatrix} 1 & x+5 & 3 \\ x & x+4 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} > 0.$$

Завдання 3.

Вивчіть правило обчислення визначників n-го порядку, властивості визначників. Для даного визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

3.1. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{42};

3.2. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{33};

3.3. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 4-го рядка;

3.4. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 3-го стовпця;

3.5. Обчисліть визначник, отримавши попередньо нулі у 3-му стовпці.

Завдання 4.

Вивчіть метод Крамера розв'язання СЛАР. Знайдіть розв'язок системи за формулами Крамера. Зробіть перевірку.

$$\begin{cases} x+y+z=6; \\ 3x-y+z=4; \\ 2x+y-z=1. \end{cases}$$

Варіант №12

Завдання 1.

Вивчіть, як обчислюються визначники другого порядку. Розв'яжіть рівняння 1.1., нерівність 1.2. та побудуйте графік функції 1.3.:

1.1. $\begin{vmatrix} 3-x & x+2 \\ x+1 & x-1 \end{vmatrix} = -5;$

1.2. $\begin{vmatrix} 2 & x+3 \\ 5 & x \end{vmatrix} > 0;$

1.3. $y = \begin{vmatrix} -2 & x-1 \\ -\frac{1}{x} & 1 \end{vmatrix}.$

Завдання 2.

Вивчіть правило трикутників (правило Саррюса) обчислення визначників 3-го порядку та розв'яжіть нерівність

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -3x & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \geq 0.$$

Завдання 3.

Вивчіть правило обчислення визначників n-го порядку, властивості визначників. Для даного визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

3.1. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{12};
3.2. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{32};
3.3. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 1-го рядка;
3.4. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 2-го стовпця;
3.5. Обчисліть визначник, отримавши попередньо нулі у 2-му стовпці.

Завдання 4.

Вивчіть метод Крамера розв'язання СЛАР. Знайдіть розв'язок системи за формулами Крамера. Зробіть перевірку.

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 3; \\ 3x + 4y - 5z = -8; \\ 2y + 7z = 17. \end{cases}$$

Варіант №13

Завдання 1.

Вивчіть, як обчислюються визначники другого порядку. Розв'яжіть рівняння 1.1., нерівність 1.2. та побудуйте графік функції 1.3.:

1.1. $\begin{vmatrix} x-1 & -y-4 \\ y+4 & x-1 \end{vmatrix} = 0;$ **1.3.** $y = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & \sqrt{4-x^2} \end{vmatrix}.$

1.2. $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} > 14;$

Завдання 2.

Вивчіть правило трикутників (правило Саррюса) обчислення визначників 3-го порядку та розв'яжіть рівняння

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2x+3 \\ 3-x & 1 & 1 \\ 2x+1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Завдання 3.

Вивчіть правило обчислення визначників n-го порядку, властивості визначників. Для даного визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

3.1. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{42};
3.2. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{34};
3.3. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 4-го рядка;
3.4. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 4-го стовпця;
3.5. Обчисліть визначник, отримавши попередньо нулі у 4-му стовпці.

Завдання 4.

Вивчіть метод Крамера розв'язання СЛАР. Знайдіть розв'язок системи за формулами Крамера. Зробіть перевірку.

$$\begin{cases} x+5y+z=-7; \\ 2x-y-z=0; \\ x-2y-z=2. \end{cases}$$

Варіант №14

Завдання 1.

Вивчіть, як обчислюються визначники другого порядку. Розв’яжіть рівняння 1.1., нерівність 1.2. та побудуйте графік функції 1.3.:

1.1. $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} \cdot x = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}$;

1.3. $y = \begin{vmatrix} x^2+1 & -2 \\ |x| & 1 \end{vmatrix}$.

1.2. $\begin{vmatrix} x+2 & x-1 \\ x+1 & x^2-2x+4 \end{vmatrix} < 9$;

Завдання 2.

Вивчіть правило трикутників (правило Саррюса) обчислення визначників 3-го порядку та розв’яжіть нерівність

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & x+5 & 2-x \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \leq 4.$$

Завдання 3.

Вивчіть правило обчислення визначників n-го порядку, властивості визначників. Для даного визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

3.1. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{32};
3.2. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{22};
3.3. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 3-го рядка;
3.4. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 2-го стовпця;
3.5. Обчисліть визначник, отримавши попередньо нулі у 2-му стовпці.

Завдання 4.

Вивчіть метод Крамера розв’язання СЛАР. Знайдіть розв’язок системи за формулами Крамера. Зробіть перевірку.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6; \\ 3x - 2y - 5z = 12; \\ 2x + 3y - 4z = 16. \end{cases}$$

Варіант №15

Завдання 1.

Вивчіть, як обчислюються визначники другого порядку. Розв’яжіть рівняння 1.1., нерівність 1.2. та побудуйте графік функції 1.3.:

1.1. $\begin{vmatrix} x-2 & 5-x \\ x-2 & 6+x \end{vmatrix} = 0;$

1.2. $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < -16;$

1.3. $y = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & \sqrt{9-x^2} \end{vmatrix}.$

Завдання 2.

Вивчіть правило трикутників (правило Саррюса) обчислення визначників 3-го порядку та розв’яжіть нерівність

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ x+2 & 0 & 1 \\ -2 & 3-x & 1 \end{vmatrix} > 0.$$

Завдання 3.

Вивчіть правило обчислення визначників n-го порядку, властивості визначників. Для даного визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

3.1. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{22};

3.2. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{33};

3.3. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 2-го рядка;

3.4. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 3-го стовпця;

3.5. Обчисліть визначник, отримавши попередньо нулі у 3-му стовпці.

Завдання 4.

Вивчіть метод Крамера розв’язання СЛАР. Знайдіть розв’язок системи за формулами Крамера. Зробіть перевірку.

$$\begin{cases} x + 5y + z = 0; \\ 3x - 4y + 2z = 16; \\ 2x - y - 3z = -4. \end{cases}$$

Варіант №16

Завдання 1.

Вивчіть, як обчислюються визначники другого порядку. Розв'яжіть рівняння 1.1., нерівність 1.2. та побудуйте графік функції 1.3.:

1.1. $\begin{vmatrix} 3x+2 & 5 \\ x+4 & -1 \end{vmatrix} = 2;$

1.3. $y = \begin{vmatrix} x^2+9 & 6 \\ |x| & 1 \end{vmatrix}.$

1.2. $\begin{vmatrix} 5 & x-1 \\ \frac{1}{x} & 1 \end{vmatrix} > 6;$

Завдання 2.

Вивчіть правило трикутників (правило Саррюса) обчислення визначників 3-го порядку та розв'яжіть нерівність

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1.$$

Завдання 3.

Вивчіть правило обчислення визначників n-го порядку, властивості визначників. Для даного визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

3.1. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{42};

3.2. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{31};

3.3. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 4-го рядка;

3.4. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 1-го стовпця;

3.5. Обчисліть визначник, отримавши попередньо нулі у 1-му стовпці.

Завдання 4.

Вивчіть метод Крамера розв'язання СЛАР. Знайдіть розв'язок системи за формулами Крамера. Зробіть перевірку.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 7; \\ x + 3y - 2z = 0; \\ 2y - z = 2. \end{cases}$$

Варіант №17

Завдання 1.

Вивчіть, як обчислюються визначники другого порядку. Розв'яжіть рівняння 1.1., нерівність 1.2. та побудуйте графік функції 1.3.:

1.1. $\begin{vmatrix} x-1 & 7-x \\ x-1 & x+8 \end{vmatrix} = 0;$

1.2. $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 3 & x \end{vmatrix} > 0;$

1.3. $y = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & \sqrt{x^2} \end{vmatrix}.$

Завдання 2.

Вивчіть правило трикутників (правило Саррюса) обчислення визначників 3-го порядку та розв'яжіть нерівність

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ x+5 & x+4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} < 0.$$

Завдання 3.

Вивчіть правило обчислення визначників n-го порядку, властивості визначників. Для даного визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

3.1. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{32};
3.2. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{34};
3.3. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 3-го рядка;
3.4. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 4-го стовпця;
3.5. Обчисліть визначник, отримавши попередньо нулі у 4-му стовпці.

Завдання 4.

Вивчіть метод Крамера розв'язання СЛАР. Знайдіть розв'язок системи за формулами Крамера. Зробіть перевірку.

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 20; \\ 2x - y - 3z = 3; \\ 3x + 4y - 5z = -8. \end{cases}$$

Варіант №18

Завдання 1.

Вивчіть, як обчислюються визначники другого порядку. Розв'яжіть рівняння 1.1., нерівність 1.2. та побудуйте графік функції 1.3.:

1.1. $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \cdot x = \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$;

1.3. $y = \begin{vmatrix} x^2+1 & |x| \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$.

1.2. $\begin{vmatrix} 2 & x-1 \\ \frac{1}{x} & 1 \end{vmatrix} > 2$;

Завдання 2.

Вивчіть правило трикутників (правило Саррюса) обчислення визначників 3-го порядку та розв'яжіть нерівність

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & x+5 & -1 \\ -1 & 2-x & 2 \end{vmatrix} > 4.$$

Завдання 3.

Вивчіть правило обчислення визначників n-го порядку, властивості визначників. Для даного визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

3.1. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{12};
3.2. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{32};
3.3. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 1-го рядка;
3.4. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 2-го стовпця;
3.5. Обчисліть визначник, отримавши попередньо нулі у 2-му стовпці.

Завдання 4.

Вивчіть метод Крамера розв'язання СЛАР. Знайдіть розв'язок системи за формулами Крамера. Зробіть перевірку.

$$\begin{cases} x - y = 4; \\ 2x + 3y + z = 1; \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$$

Варіант №19

Завдання 1.

Вивчіть, як обчислюються визначники другого порядку. Розв'яжіть рівняння 1.1., нерівність 1.2. та побудуйте графік функції 1.3.:

1.1. $\begin{vmatrix} x+5 & -y-1 \\ y+1 & x+5 \end{vmatrix} = 0;$ **1.3.** $y = \begin{vmatrix} x^2+2 & |x| \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.$

1.2. $\begin{vmatrix} x & 4 \\ 4 & x \end{vmatrix} < 0;$

Завдання 2.

Вивчіть правило трикутників (правило Саррюса) обчислення визначників 3-го порядку та розв'яжіть нерівність

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ x+2 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & x \end{vmatrix} < 0.$$

Завдання 3.

Вивчіть правило обчислення визначників n-го порядку, властивості визначників. Для даного визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

3.1. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{42};
3.2. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{34};
3.3. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 4-го рядка;
3.4. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 4-го стовпця;
3.5. Обчисліть визначник, отримавши попередньо нулі у 4-му стовпці.

Завдання 4.

Вивчіть метод Крамера розв'язання СЛАР. Знайдіть розв'язок системи за формулами Крамера. Зробіть перевірку.

$$\begin{cases} x + 5y - z = 7; \\ 3x - 2y + 4z - 11; \\ 2x - y - z = 4. \end{cases}$$

Варіант №20

Завдання 1.

Вивчіть, як обчислюються визначники другого порядку. Розв'яжіть рівняння 1.1., нерівність 1.2. та побудуйте графік функції 1.3.:

1.1. $\begin{vmatrix} 2x+1 & x+3 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = -1;$

1.2. $\begin{vmatrix} 1 & x-1 \\ 2 & x^2-2x+1 \end{vmatrix} > 0;$

1.3. $y = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & \sqrt{16-x^2} \end{vmatrix}.$

Завдання 2.

Вивчіть правило трикутників (правило Саррюса) обчислення визначників 3-го порядку та розв'яжіть нерівність

$$\begin{vmatrix} 2 & 2+x & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} < 0.$$

Завдання 3.

Вивчіть правило обчислення визначників n-го порядку, властивості визначників. Для даного визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

3.1. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{22};
3.2. Знайдіть мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{32};
3.3. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 2-го рядка;
3.4. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами 2-го стовпця;
3.5. Обчисліть визначник, отримавши попередньо нулі у 2-му стовпці.

Завдання 4.

Вивчіть метод Крамера розв'язання СЛАР. Знайдіть розв'язок системи за формулами Крамера. Зробіть перевірку.

$$\begin{cases} x+2y+z=4; \\ 3x-5y+3z=1; \\ 2x+7y-z=8. \end{cases}$$

РОЗДІЛ 2. СТИСЛІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

2.1 Матриці

Прямокутна таблиця чисел, що складається з $\boldsymbol{m}$ рядків та $\boldsymbol{n}$ стовпців, називається числовою матрицею порядку (розміру) m х n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Скорочено: $A= (a_{ij})$, a_{ij}– елементи матриці, i – номер рядка, j – номер стовпця,
i = 1,2,…,m ($i=\overline{1,m}$), j = 1,2,…,n ($j=\overline{1,n}$).

Види матриць:

1) Якщо $\boldsymbol{m=n}$, то матрицю називають квадратною ;
якщо $\boldsymbol{m=1}$ – матрицею-рядком;
якщо $\boldsymbol{n=1}$ – матрицею-стовпцем.
Зокрема,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ – квадратна матриця 2-ого порядку.} \tag{2}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{– квадратна матриця 3-ого порядку.} \tag{3}$$

Числа $a_{11}, a_{22}, \ a_{33}$ утворюють головну діагональ ($i=j$).
Ряд визначень надалі буде наданий для матриці (3).
$(\mathrm{a}_{11} \quad \mathrm{a}_{12} \quad \mathrm{a}_{13})$ – матриця-рядок порядку 1x3,
$\begin{pmatrix} \mathrm{a}_{11} \\ \mathrm{a}_{21} \\ \mathrm{a}_{31} \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець порядку 3x1.

2) Квадратна матриця, що має ненульові елементи тільки на головній діагоналі, називається діагональною:

$$\mathrm{diag}A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

3) Діагональна матриця, всі елементи головної діагоналі якої дорівнюють одиниці, називається одиничною:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Скорочено : $E= (\delta_{ij})$.

$\delta_{ij}= \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$ - символ Кронекера.

4) Прямокутна (в загальному випадку) матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається нульовою:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5) Заміна кожного рядка матриці A її відповідним стовпцем називається транспонуванням. Транспонована по відношенню до матриці A матриця позначається A^T :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $(A^T)^T = A$.

<u>Приклад 1</u>. Класифікувати наступні матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & -8 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 9 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & -8 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 9 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad K = (9).$$

Розв'язання: A, B, D, C – квадратні матриці, A, B, D – 3-го порядку, C – 2-го.

G, F – прямокутні, відповідно порядку 2х3 (що містить два рядка та три стовпця) і 3х2 (три рядки і два стовпця), N – матриця-рядок порядку 1х3, Q – матриця-стовпчик порядку 3х1, K – матриця-скаляр (число), D – діагональна, $A^T = B$, $G^T = F$, $N^T = Q$.

2.2 Визначники квадратних матриць

Кожній квадратній матриці A можна поставити у відповідність число, що називається її визначником і позначається $\det A$, Δ або $|A|$. Визначник матриці A також називають її детермінантом.

- Визначник матриці 2-ого порядку (2) обчислюється за формулою:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

Схема обчислення:

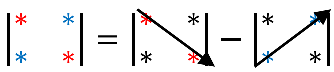


рис.1

<u>Приклад 2</u>. Обчислити визначник матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - (-2) \cdot 5 = 21 - (-10) = 31.$$

- Визначник матриці 3-ого порядку (3) обчислюється за формулою:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} -$$

$$- a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}.$$

Схема обчислення за правилом трикутників:

$$\begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

рис.2

Схема обчислення за правилом Саррюса:

$$\det A = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

рис.3

– до вихідного визначника приписують два перших стовпця і складають дві групи добутків.

<u>Приклад 3</u>. Обчислити визначник матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

а) Обчислимо визначник за правилом трикутників, використовуючи рис.2:

б)

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 3 + (-3)\cdot 2\cdot 5 + 3\cdot 4\cdot(-1) - 1\cdot 2\cdot 5 + 2\cdot 4\cdot 2 + (-3)\cdot 3 \times$$

$$\times 3 = (12 - 30 - 12) - 10 + 16 - 27 = -30 + 21 = -9.$$

в) Обчислимо визначник за правилом Саррюса, використовуючи рис.3:

$$\det A = \left|\begin{matrix} 2 & 3 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \\ -1 & 2 \end{matrix} = (12 - 12 - 30) - (-10 + 16 - 27) = -9.$$

$$- \qquad\qquad +$$

<u>Приклад 4</u>. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 10 + 1\cdot(-1)\cdot 5 + 0\cdot 16\cdot 0 - (0\cdot 3\cdot 5 + (-1)\cdot 16\cdot 2 + 1\cdot 0\cdot 10) =$$

$= 60 - 5 + 0 - (0 - 32 + 0) = 55 + 32 = 87.$ (за правилом трикутників)

- Мінором елементу a_{ij} визначника називається визначник, який отримується з даного шляхом викреслення i-го рядка та j-ого стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}. Позначається M_{ij} .
- Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника називається число, яке визначається за правилом:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}.$$

<u>Приклад 5</u>. Обчислити алгебраїчне доповнення елементів a_{12} та a_{33} визначника

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 6 & -2 & 7 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 6 & -2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 0 \cdot 7 - 6 \cdot 4 = -24,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^3 \cdot (-24) = -(-24) = 24$$
$$((-1)^{2к} = 1, \quad (-1)^{2к+1} = -1, \ \ к = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 6 & -2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot (-5) = -5.$$

- **Теорема розкладання (спосіб обчислення визначників вищих порядків)**:

  Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}, \ \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Зокрема,

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$ – обчислення визначника шляхом розкладання за елементами 1-го рядка.

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33}$ – обчислення визначника шляхом розкладання за елементами 3-го стовпця.

<u>Приклад 6</u>. Обчислити визначник із прикладу 3 шляхом його розкладання за елементам 1-го рядка; 2-го рядка.

Розв'язання:

а) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{11} + 3 \cdot A_{12} + 5 \cdot A_{13}$ (за елементами 1-го рядка).

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = +(2 \cdot 3 - 2 \cdot 4) = -2,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(-3 \cdot 9 - (-1) \cdot 4) = 5,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = +(-6 + 2) = -4,$$

$$\Delta = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 + 5 \cdot (-4) = -9.$$

б) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 \cdot A_{21} + 2 \cdot A_{22} + 4 \cdot A_{23}$ (за елементами 2-го рядка).

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(9 - 10) = 1,$$

$$A_{22}=+\begin{vmatrix}2 & 5\\ -1 & 3\end{vmatrix}=6+5=11,$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-(4+3)=-7,$$

$$\Delta=-3+22-28=-9.$$

Зауваження 1: При виборі знаку перед мінором в алгебраїчному доповненні слід керуватися наступним правилом:

$$\begin{vmatrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{vmatrix}.$$

- **Основні властивості визначників.**

1. Значення визначника не зміниться, якщо всі його рядки замінити стовпцями, причому кожний рядок замінити стовпцем з тим же номером (транспонування визначника). Наприклад,

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 5\end{vmatrix}=10-12=-2.$$

2. Перестановка двох рядків (або стовпців) визначника еквівалентна його множенню на (-1). Наприклад,

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{11} & a_{12}\end{vmatrix},$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-2;\ \begin{vmatrix}4 & 5\\ 2 & 3\end{vmatrix}=12-10=2;\ \begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=12-10=2.$$

3. Множення всіх елементів одного рядка (або одного стовпця) визначника на $\forall$ (символ $\forall$ — від any — будь — який, довільний, для будь — якого) число k еквівалентне множенню визначника на це число k. Наприклад,

$$\begin{vmatrix}к\cdot a_{11} & a_{12}\\ к\cdot a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=к\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2\cdot 1 & 3\\ 2\cdot 2 & 5\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix}=2\cdot(5-6)=-2.$$

4. Визначник дорівнює нулю, якщо: всі елементи $\forall$ рядка (або стовпця) дорівнюють 0 (k=0); елементи $\forall$ двох рядків (або стовпців) пропорційні або рівні. Наприклад,

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ к\cdot a_{11} & к\cdot a_{12}\end{vmatrix}=к\cdot\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{11} & a_{12}\end{vmatrix}=к\cdot 0=0,$$

$$\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}=2\cdot 6-4\cdot 3=12-12=0.$$

(рядки пропорційні: другий рядок отримаємо шляхом множення всіх елементів першого на 2).

5. Визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) додати відповідні елементи другого рядка (стовпця), попередньо помножені на ∀ загальний множник. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + к \cdot a_{21} & a_{12} + к \cdot a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 + 4 \cdot 2 & 3 + 5 \cdot 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 13 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 \cdot 5 - 4 \cdot 13 = -2.$$

Приклад 7. Обчислити визначник 4-ого порядку: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

Використаємо теорему розкладання і властивості визначників. Додамо до другого рядка перший, помножений на (-2), до третього – перший, помножений на (-1), до четвертого – перший. Після цього всі елементи першого стовпця, окрім першого елемента, будуть дорівнювати нулю. Застосовуючи теорему розкладання до цього стовпця, знизимо порядок визначника:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41} = \begin{vmatrix} -5 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 5 \end{vmatrix}.$$

Отриманий визначник 3-го порядку можна обчислити за правилом трикутників (рис.2), за правилом Саррюса (рис.3). Зручно застосувати теорему розкладання до другого рядка:

$$\begin{vmatrix} -5 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23} = \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -25 + 4 = -21.$$

Приклад 8. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 7 & 8 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання:

1. Поміняємо місцями перший і четвертий рядки:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 7 & 8 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

2. Додамо до другого рядка перший , помножений на (-7), до четвертого – перший, помножений на (-2):

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & 9 & -12 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 8 & 9 & -12 \\ -2 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 9 & -12 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \times$$

$$\times (16 + 24 + 27 - 24 - 24 - 18) = -3.$$

3. Застосували теорему розкладання до першого стовпця, далі, спільний множник елементів третього рядка 3 винесли за знак визначника і для обчислення останнього застосували правило трикутників.

2.3 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

Рівняння вигляду:

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \cdots + a_n \cdot x_n = b,$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ - деякі сталі, називається лінійним рівнянням з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

В курсі середньої школи розглядали лінійні рівняння з однією, двома, трьома невідомими; це рівняння:

$$ax = b;$$
$$ax + by = \text{c};$$
$$ax + by + \text{c}z = d.$$

З геометричної точки зору, ці рівняння зображують відповідно точку на числовій прямій, пряму на площині, площину в просторі.

- Системою лінійних алгебраїчний рівнянь називають два або більше рівнянь, які розв'язуються спільно.

Це означає, що розв'язком системи будуть ті розв'язки її рівнянь, які задовольняють усім рівнянням системи.

Зокрема, система двох лінійних рівнянь з двома невідомими *x*, *y* має вигляд:

$$\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1; \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2. \end{cases} \tag{4}$$

Система трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими *x*, *y*, *z* має вигляд:

$$\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 \cdot z = d_1; \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 \cdot z = d_2; \\ a_3 \cdot x + b_3 \cdot y + c_3 \cdot z = d_3. \end{cases} \tag{5}$$

В загальному випадку система m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими записується у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}, \tag{6}$$

де через a_{ij} позначений коефіцієнт при невідомій x_j в i-му рівнянні системи ($\text{i} = 1,2, \ldots, \text{m}$; $j = 1,2, \ldots, n$), $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - невідомі, а числа $b_1, b_2, \ldots, b_m$ - називаються вільними членами.

В матричній формі система (6) має вигляд:

$$A \cdot X = B, \tag{7}$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ - матриця системи (порядку m x n),

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - матриця – стовпець невідомих (порядку n x 1) ,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ - матриця - стовпець вільних членів (порядку m x 1).

- *Розв'язком* системи (6) називається n значень невідомих $x_1 = x_1^o$, $x_2 = x_2^o$, ... ,$x_n = x_n^o$, при підстановці яких в (6) всі рівняння системи перетворюються у вірні рівності.
- Система рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язку.
- Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок і *невизначеною*, якщо вона має більше одного розв'язку.

  В останньому випадку кожен її розв'язок називається *частинним розв'язком* системи.
- Сукупність всіх частинних розв'язків називається *загальним розв'язком* системи.
- Дві системи називаються *еквівалентними* (рівносильними) ,якщо вони мають однакові розв'язки або обидві несумісні.

Приклад 9. Розв'язати систему рівнянь.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 12, \\ x_1 - 2x_2 = 13. \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь з двома невідомими x_1 та x_2. Зі «шкільної» алгебри знаємо методи:

а) Метод підстановки.

З 2-ого рівняння виразимо x_1через x_2:

$$x_1 = 13 + 2x_2,$$

підставимо знайдений вираз в перше рівняння, в результаті отримаємо одне рівняння з одним невідомим:

$$\begin{gathered} 2(13 + 2x_2) + 3x_2 = 12 \\ 26 + 4x_2 + 3x_2 = 12 \\ 7x_2 = -14 \\ x_2 = -2. \end{gathered}$$

Тоді: $x_1 = 13 + 2x_2 \cdot (-2) = 9.$

Відповідь: $x_1 = 9$, $x_2 = -2$, система визначена.

б) Метод додавання.

Помножимо ліву і праву частини 2-ого рівняння на (-2):

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 12 \\ x_1 - 2x_2 = 13 \end{cases} \quad | \text{ x } (-2)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 12 \\ -2x_1 + 4x_2 = -26 \end{cases}$$ - система ,еквівалентна даній.

Додамо почленно рівняння системи:

$$7x_2 = -14, \quad x_2 = -2.$$

Підставимо знайдене значення в будь-яке з рівнянь вихідної системи, нехай в 2-е:

$$x_1 - 2 \cdot (-2) = 13, \quad x_1 + 4 = 13, \cdot x_1 = 9.$$

Відповідь: $\mathrm{x}_1 = 9, \quad \mathrm{x} = -2.$

<u>Зауваження 2</u>: Якщо коефіцієнти при невідомих в рівняннях системи (4) не пропорційні, то система визначена.

<u>Приклад 10</u>. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 13, \\ -2x_1 + 4x_2 = -26. \end{cases}$$

Розв'язання. Система невизначена. Дійсно, якщо обидві частини другого рівняння розділити на (-2), то отримаємо перше рівняння, і система двох рівнянь зводиться до одного рівняння з двома невідомими, а саме:

$$x_1 - 2x_2 = 13.$$

Система має нескінчену множину розв'язків, що задаються формулою:

$$x_1 = 13 + 2x_2.$$

Задаючи довільні значення невідомій x_2, отримаємо відповідні значення x_1. Нехай, наприклад: $x_2 = 0$, тоді $x_1 = 13$. При $x_2 = 1 => x_1 = 15$. Отримали частинні розв'язки системи.

<u>Зауваження 3</u>: Якщо коефіцієнти при невідомих і вільні члени в рівняннях системи (4) пропорційні, то система невизначена; розв'язком є будь-яка пара (x, y), що задовольняє будь-якому рівнянню системи.

<u>Приклад 11</u>. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 7. \end{cases}$$

Розв'язання. Система не сумісна, так як один вираз системи не може одночасно дорівнювати різним значенням.

Відповідь: розв'язків немає.

<u>Зауваження 4</u>: Якщо коефіцієнти при невідомих в рівняннях системи (4) пропорційні, але вони не пропорційні вільним членам, то система несумісна.

<u>Приклад 12</u>.

Системи $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 12 \\ \mathrm{x}_1 - 2\mathrm{x}_2 = 13 \end{cases} \sim \begin{cases} \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 = 7 \\ \mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2 = 11 \end{cases}$ еквівалентні, $\sim$ - знак еквівалентності. $x_1 = 9, x_2 = -2.$

Основними методами розв'язання СЛАР є метод Крамера, матричний метод і метод Гауса. Перші два методи застосовуються тільки для розв'язання систем з квадратною невиродженою матрицею. Методом Гауса можна розв'язувати будь-які СЛАР.

2.4 Розв'язування СЛАР за формулами Крамера

Нехай маємо систему(5):

$$\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 \cdot z = d_1; \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 \cdot z = d_2;, \\ a_3 \cdot x + b_3 \cdot y + c_3 \cdot z = d_3. \end{cases}$$

a_i, b_i, c_i та d_i $(i \neq \overline{1,3})$ – задані числа, *x, y, z* – невідомі.

Визначник Δ цієї системи дорівнює

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Якщо елементи першого стовпця цього визначника замінити на числа d_1, d_2, d_3, то отримаємо визначник

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

При заміні другого стовпця визначника Δ числами d_1, d_2, d_3 отримаємо визначник

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Аналогічно отримаємо визначник

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

- Якщо $\Delta \neq 0$, то система (5) має єдиний розв'язок, який визначається за формулами Крамера:

$$\boxed{x = \frac{\Delta x}{\Delta}} \qquad \boxed{y = \frac{\Delta y}{\Delta}} \qquad \boxed{z = \frac{\Delta z}{\Delta}} \tag{8}$$

- Якщо $\Delta = 0$ і хоча б один з визначників, $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ не дорівнює нулю, то система несумісна.
- Якщо $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, то система несумісна або має нескінченно багато розв'язків.

<u>Приклад 13</u>: Розв'язати систему рівнянь, використовуючи формули Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

Розв'язання. Визначник системи дорівнює

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 18 - 8 + 6 - 6 - 16 = -2 \neq 0.$$

Обчислимо допоміжні визначники:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 18 + 8 - 6 - 18 - 16 = -2;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (2 + 3 - 3 + 3 - 1 - 6) = -8;$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 18 - 8 + 6 - 6 - 8 = 4.$$

Розв’язок системи:

$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1;$

$x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-8}{-2} = 4;$

$x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{4}{-2} = -2.$

Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = -2$.

РОЗДІЛ 3. ЗРАЗКИ ОФОРМЛЕННЯ РОЗВ'ЯЗАНЬ ЗАДАЧ У СКОРОЧЕНОМУ ВИГЛЯДІ

Завдання 1.

1.1. Розв'язати рівняння

$$\begin{vmatrix} 2x-1 & x+1 \\ x+2 & x-1 \end{vmatrix} = -9.$$

Розв'язання:

$$(2x-1)\cdot(x-1)-(x+2)\cdot(x+1)=-9$$
$$2x^2-2x-x+1-x^2-x-2x-2=-9$$
$$x^2-6x-1=-9$$
$$x^2-6x+8=0$$
$$x_1=2,\ x_2=4.$$

1.2. Розв'язати нерівність

$$\begin{vmatrix} 2x-2 & 1 \\ 7x & 2 \end{vmatrix} > 5.$$

Розв'язання:

$$(2x-2)\cdot 2-7x>5$$
$$4x-4-7x>5$$
$$-3x>9$$
$$x<-3.$$

1.3. Побудувати графік функції

$$y=\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 0 & \sqrt{16-x^2} \end{vmatrix}.$$

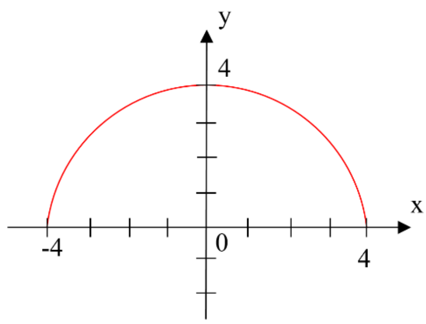
Розв'язання:

$$y=\sqrt{16-x^2}$$

Рівняння $x^2+y^2=16$ визначає коло радіуса $R=4$ з центром в початку координат.

Для даного рівняння $y\geq 0,\ 16-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 16 \Rightarrow -4\leq x\leq 4.$

Рівняння визначає півколо, розташоване у верхній півплощині:



Завдання 2. Розв'язати рівняння

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ 10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язання:

$$-3-2x+30x-10x-9-2x=0$$
$$16x-12=0$$
$$x=\frac{3}{4}.$$

Завдання 3.

Для даного визначника $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & 2 & 3 \\ 4 & 9 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

3.1. Знайти мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{32}.

Розв'язання: Знаходимо: $M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 6 + 0 - 0 - 6 - 3 = -13;$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -(-13) = 13.$$

3.2. Знайти мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{31}.

Розв'язання:

Знаходимо: $M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 7 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 14 + 9 + 6 - 12 - 7 = -14;$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = +(-14) = -14.$$

3.3. Обчислити визначник, розклавши його за елементами третього рядка.

Розв'язання:

$\Delta = 4 \cdot \mathrm{A}_{31} + 9 \cdot \mathrm{A}_{32} + 5 \cdot \mathrm{A}_{33} + 6 \cdot \mathrm{A}_{34}.$

$A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 9 + 0 - 0 - 9 - 6 = -17;$

$A_{34} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -(14 + 9 + 0 - 0 - 6 - 12) = -5;$

$\Delta = 4 \cdot (-14) + 9 \cdot 13 + 5 \cdot (-17) + 6 \cdot (-5) = -54.$

3.4. Обчислити визначник, розклавши його за елементами першого стовпця.

Розв'язання:

$\Delta = 1\,\mathrm{A}_{11} + 3\mathrm{A}_{21} + 4\mathrm{A}_{31} + 0\mathrm{A}_{41};$

$A_{11} = +\begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 35 + 54 + 36 - 45 - 84 - 18 = -22;$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 9 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -(10 - 18 + 18 + 15 - 24 - 9) = 8;$

$A_{31} = -14;$

$\Delta = -22 + 3 * 8 + 4 * (-14) = -54.$

3.5. Обчислити визначник, отримавши попередньо нулі у першому стовпці.

Розв'язання.

Використаємо властивість визначників.

Обчислення визначника четвертого порядку $\Delta \neq 0$ завжди можна звести до обчислення одного визначника третього порядку, зробивши в будь-якому рядку/стовпці всі елементи, окрім одного, рівними нулю. До другого рядка визначника додамо перший, помножений на (-3), потім до третього рядка додамо перший, помножений на (-4). Тоді в першому стовпці всі елементи, окрім одного, будуть нулями.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & 2 & 3 \\ 4 & 9 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 4 & 9 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо отриманий таким чином визначник за елементами першого стовпця та обчислимо його:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 6\\ 0 & 1 & 1 & 10\\ 0 & 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 6\\ 1 & 1 & 10\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 6\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 5 & -17\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 5 & -17\end{vmatrix}=-34-20=-54.$$

У визначнику третього порядку також отримаємо нулі в першому стовпці: до другого рядка додамо перший, помножений на (-1), до третього додамо перший, помножений на (-3).

Завдання 4.
Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь, використовуючи формули Крамера.

$$\begin{cases} x+y+z=-3\\ x+2y-z=-4\\ 2x-y+3z=-3\end{cases}$$

Розв'язання:
Обчислимо визначник системи:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=6-1-2-4-1-3=-5\neq 0.$$

Обчислимо визначники Δ_x, Δ_y и Δ_z:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}-3 & 1 & 1\\ -4 & 2 & -1\\ -3 & -1 & 3\end{vmatrix}=-18+4+3+6+3+12=10;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}1 & -3 & 1\\ 1 & -4 & -1\\ 2 & -3 & 3\end{vmatrix}=-12-3+6+8-3+9=5;$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}1 & 1 & -3\\ 1 & 2 & -4\\ 2 & -1 & -3\end{vmatrix}=-6+3-8+12-4+3=0.$$

За формулами Крамера знаходимо:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{10}{-5}=-2,\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{5}{-5}=-1,\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{0}{-5}=0.$$

Перевірка:

$$-2-1+0=-3,$$
$$-2-2-0=-4,$$
$$-4+1+0=-3.$$

РОЗДІЛ 4. ДОДАТКОВІ ЗАДАЧІ

1. Розв'язати рівняння:

а) $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ 1-y & x-2 \end{vmatrix} = -4;$

б) $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ 7-y & x+4 \end{vmatrix} = -34;$

в) $\begin{vmatrix} x & y+3 & x+6 \\ x+1 & x+4 & x+7 \\ x+2 & x+5 & x+8 \end{vmatrix} = 0.$

2. Довести, що якщо числа a, b, c - дійсні, то рівняння $\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = 0$ має дійсні корені.

3. Числа 255, 391, 578 діляться на 17. Не обчислюючи значення визначника $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 3 & 9 & 1 \\ 5 & 7 & 8 \end{vmatrix}$, довести, що він також ділиться на 17.

4. Довести, що $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$

5. Обчислити визначники *n*-го порядку:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix};$

б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & 5 & 7 & -5 \\ 2 & 3 & 7 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix};$

в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & \mathrm{n}-1 \end{vmatrix};$

г) $\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ b & x & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix};$

д) $\begin{vmatrix} a+1 & x & x & \cdots & x & x \\ 1 & a & x & \cdots & x & x \\ 1 & 0 & a & \cdots & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a & x \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1+a & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1+a \end{vmatrix}$.