МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
Кафедра вищої математики та моделювання систем

Методичні вказівки
для проведення практичних занять та самостійної роботи здобувачів

«Вища математика»
Розділ “Векторна алгебра та аналітична геометрія ”

Для здобувачів вищої освіти за освітнім ступенем бакалавра за спеціальностями:
– 281 Публічне управління та адміністрування,
– 073 Менеджмент.
Інституту бізнесу, економіки та інформаційних технологій (ІБЕІТ)

Одеса 2022

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
Кафедра вищої математики та моделювання систем

Методичні вказівки
для проведення практичних занять та самостійної роботи здобувачів

«Вища математика»
Розділ "Векторна алгебра та аналітична геометрія"

Для здобувачів вищої освіти за освітнім ступенем бакалавра за спеціальностями:
– 281 Публічне управління та адміністрування,
– 073 Менеджмент.
Інституту бізнесу, економіки та інформаційних технологій (ІБЕІТ)

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики
та моделювання систем
Протокол № 9 від 21.04.22 р.

Одеса 2022

Методичні вказівки для проведення практичних занять та самостійної роботи здобувачів. «Вища математика». Розділ “Векторна алгебра та аналітична геометрія ”
Для здобувачів вищої освіти за освітнім ступенем бакалавра за спеціальностями: – 281 Публічне управління та адміністрування, – 073 Менеджмент. Інституту бізнесу, економіки та інформаційних технологій (ІБЕІТ) / Укладач: О.В. Жарова. – Одеса: НУ "ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА", 2022 - 21с.

Укладач: О.В. Жарова, канд. фіз.-мат. наук, доц.

ЗМІСТ

Одеса 2022

Мета практичних занять – організація детального розгляду окремих теоретичних положень дисципліни; формування вмінь та навичок їх практичного застосування шляхом виконання здобувачами індивідуальних завдань.

В ході практичних занять відбувається розширення, поглиблення й деталізація наукових знань, отриманих здобувачами на лекціях та в процесі самостійної роботи і спрямованих на підвищення рівня засвоєння навчального матеріалу, прищеплення умінь і навичок, розвиток наукового мислення та усного мовлення здобувачів.

В результаті проведення практичних занять здобувач повинен:

– оволодівати необхідним математичним апаратом, його основними положеннями, прийомами, методами (технікою виконання матричних операцій; аналітичними методами розв’язання задач; операцією диференціювання);
– вміти дати математичний опис (моделювати) економічних процесів з умови задачі, починаючи від простого моделювання у вигляді нескладних функціональних залежностей і кінчаючи функціональними рівняннями, аналізувати отриману математичну модель, з’ясовувати реальний зміст параметрів, з якими припущеннями математична модель описує реальний процес, аналізувати отриманий результат).

Самостійна робота є основним засобом засвоєння здобувачем навчального матеріалу в час, вільний від обов'язкових навчальних занять.

Співвідношення обсягів аудиторних занять і самостійної роботи здобувачів визначається навчальним планом підготовки бакалаврів спеціальності 281 «Публічне управління та адміністрування», з урахуванням специфіки та змісту дисципліни, її місця, значення і дидактичної мети в реалізації освітньо-професійної програми.

– РОЗПОДІЛ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ ЗДОБУВАЧА

– 1 семестр

№ зп	Зміст роботи	Кількість годин
1	Самостійне опрацювання теоретичного матеріалу	34
2	Підготовка до практичних занять	27
3	Підготовка до екзамену	30
	Разом	91

Розділ ІІ
Елементи векторної алгебри

Навчальні завдання

Приклад. **1.** *Дано три точки A (1, 1, 1), B (2, 2, 1) і C (2, 1, 2). Знайти кут* $\varphi = \angle BAC$.

Знайдемо вектори $\vec{AB} = (1, 1, 0)$, $\vec{AC} = (1, 0, 1)$. *Згідно з формулою (2.5) маємо:*

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2+0}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{2}, \text{ отже, } \varphi = 60^\circ.$$

Приклад. **2.** *Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах* $\vec{a} = (5, 2, 7)$, $\vec{b} = (1, 2, 4)$ *як на сторонах.*

Знайдемо векторний добуток векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *:*

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} = -6\vec{i} - 14\vec{j} + 8\vec{k}.$$

Знайдемо $|\vec{c}| = \sqrt{6^2+14^2+8^2} = 2\sqrt{74}$ *кв. од.*

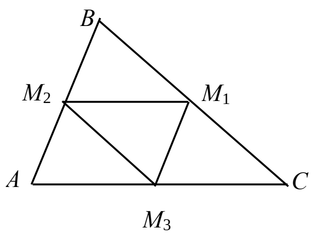
Приклад. **3.** *У просторі задано чотири точки A (1, 1, 1), B (4, 4, 4), C (3, 5, 5), D (2, 4, 7). Знайти об'єм піраміди ABCD.*

З елементарної математики відомо, що об'єм піраміди ABCD дорівнює одній шостій об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ *і* $\vec{AD}$, *а останній, у свою чергу, дорівнює модулю мішаного добутку. Отже, маємо:*

$$\vec{AB} = (3, 3, 3),\ \vec{AC} = (2, 4, 4),\ \vec{AD} = (1, 3, 6);$$

$$V_{\text{пр}} = \frac{1}{6}\left|\vec{AB}\left(\vec{AC}\cdot\vec{AD}\right)\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3 \text{ куб. од.}$$

Приклад. **4.** *Дано трикутник A (4, 1), B (7, 5), C (– 4, 7). Знайти площу трикутника, вершини якого містяться в точках перетину бісектрис трикутника зі сторонами (рис.13).*



Бісектриса трикутника поділяє протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам. Знайдемо довжину відрізків AB, BC і AC за формулами:

$$AB = \sqrt{(4-7)^2+(1-5)^2} = 5,\ BC = \sqrt{(7+4)^2+(5+7)^2} = 15,$$

$$AC = \sqrt{(4+4)^2+(1-7)^2} = 10.$$

Знайдемо відношення, в яких основи бісектрис точки M_1, M_2, M_3 *(рис.) поділяють відповідні відрізки:*

$$\frac{|BM_1|}{|M_1C|} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2};\quad \frac{|AM_2|}{|M_2B|} = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{3};\quad \frac{|AM_3|}{|M_3C|} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{3}.$$

Скориставшись формулами, знайдемо відповідно координати точок M_1 (x_1, y_1), M_2 (x_2, y_2), M_3 (x_3, y_3).

$$x_1 = \frac{7-4\cdot\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{10}{3};\quad y_1 = \frac{5+7\cdot\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{17}{3};\quad M_1\left(\frac{10}{3};\ \frac{17}{3}\right);$$

$$x_2 = \frac{4+7\cdot\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{26}{5}; \quad y_2 = \frac{1+5\cdot\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{13}{5}; \quad M_2\left(\frac{26}{5};\ \frac{13}{5}\right);$$

$$x_3 = \frac{4-4\cdot\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = 2; \quad y_3 = \frac{1+7\cdot\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{5}{2}; \quad M_3\left(2;\ \frac{5}{2}\right).$$

Площу трикутника $M_1\, M_2\, M_3$ обчислимо за формулою:

$$S = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \frac{26}{5}-\frac{10}{3} & 2-\frac{10}{3} \\ \frac{13}{2}-\frac{17}{3} & \frac{5}{2}-\frac{17}{3} \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \frac{28}{15} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{46}{15} & -\frac{19}{6} \end{matrix}\right\| = 50 \text{ кв. од.}$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ

1. *Визначити відстань точки A (12, –3, 4) від початку координат і від осей координат.*
Відповідь. 13; 5; $4\sqrt{10}$ *;* $3\sqrt{17}$.

2. *Вектор утворює з двома осями системи координат кути, що рівні* 60°. *Під яким кутом він нахилений до третьої осі.*
Відповідь. 45° або 135°.

3. *Обчислити координати точки M, якщо відстань від початку координат до неї рівна 8 од., а вектор* $\overrightarrow{OM}$ *нахилений до осі Ox під кутом* 45°, *а до осі Oz — під кутом* 60°.
Відповідь. $M_1(4\sqrt{2}, 4, 4),\ M_2(4\sqrt{2}; -4; 4).$

4. *Три вектори* $\overrightarrow{AB} = \vec{a};\ \overrightarrow{BC} = \vec{b};\ \overrightarrow{CA} = \vec{c}$ *є сторони трикутника. За допомогою* $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ *знайти вектори, що збігаються з медіанами трикутника:* $\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{BN},\ \overrightarrow{CP}$.

5. *У паралелограмі ABCD позначаємо:* $\overrightarrow{AC} = \vec{a},\ \overrightarrow{AD} = \vec{b}$. *Виразити через* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ *вектори* $\overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{MB},\ \overrightarrow{MC}$ і $\overrightarrow{MD}$, *де M — точка перетину діагоналей паралелограма.*

6. *Яку властивість повинні мати вектори, щоб виконувалися співвідношення:*

1) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$;
2) $\vec{a}+\vec{b} = \lambda\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$;
3) $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \dfrac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$;
4) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|$;
5) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = |\vec{a}| - \left|\vec{b}\right|$;
6) $\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = [\vec{a}[+ \left|\vec{b}\right|$?

Відповідь. 1) $\vec{a}\perp\vec{b}$; 2) $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — *колінеарні;* 3) $\vec{a}$ і $\vec{b}$ *мають однаковий напрям;* 4) $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — *колінеарні й мають однаковий напрям;* 5), 6), $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — *колінеарні, але протилежно напрямлені.*

7. *Обчислити довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах* $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{g};\ \ \vec{b} = \vec{p} - 3\vec{g}$ *, коли відомо, що* $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{g}| = 3$, $\left(\widehat{p\,g}\right) = -\frac{\pi}{4}$.
Відповідь. 15 і $\sqrt{593}$.

8. *Обчислити довжину вектора* $\vec{a} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ *і кути, які він утворює з осями.*

Відповідь. 7; $\arccos\frac{6}{7};\ \arccos\left(-\frac{2}{7}\right);\ \arccos\frac{3}{7}$.

9. *Знайти* $3\vec{m}^2 - 2(\vec{m}\vec{n}) + 4\vec{n}^2$, якщо $|m| = \frac{1}{3}$; $|\vec{n}| = b$; $(\widehat{mn}) = \frac{\pi}{3}$.

Відповідь. 143.

10. *Знайти* $|\vec{a}|$, якщо $\vec{a} = 2\vec{m} - 4\vec{n}$; $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ $(\widehat{mn}) = \frac{\pi}{2}$.

Відповідь. 5.

11. *Який кут утворюють одиничні вектори* $\vec{s}$, $\vec{g}$, *якщо* $\vec{a} = \vec{s} + 3\vec{g}$; $\vec{b} = 5\vec{s} - 4\vec{g}$ — *взаємно перпендикулярні.*

Відповідь. 60°.

12. *Знайти проекцію вектора* $\vec{a} = 10\vec{m} - 2\vec{n}$ *на напрям вектора* $b = 5\vec{m} - 12\vec{n}$, *де* $\vec{m}$ і $\vec{n}$ *одиничні орти.*

Відповідь. 2.

13. *Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах* $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$; $\vec{в} = \vec{m} - 3\vec{n}$, *якщо* $|\vec{m}| = 5$; $|n| = 1$ *і* $(\widehat{mn}) = 30^\circ$.

Відповідь. 125 кв. од.

14. *Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах* $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$; $b = \vec{j} + \vec{k}$.

Відповідь. $\sqrt{35}$ *кв. од.*

15. *Обчисліть проекцію вектора* $\vec{a} = 3\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k}$ *на вектор* $\vec{b} = (\vec{i} - 2\vec{k}) \times (\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k})$.

Відповідь. $\frac{6}{7}$.

16. *Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах* $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$; $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

17. *Обчислити висоту паралелепіпеда, побудованого на векторах* $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{i} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, *якщо його основа побудована на векторах* $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Відповідь. $\frac{49}{\sqrt{232}}$.

18. *Дано вершини трикутника A (3, 2); B (–1, –1); C (11, –6). Знайти довжини його сторін і точку перетину медіан.*

19. *Знайти вершини трикутника, знаючи середини його сторін* $M(3;-2)$, $N(1;6)$, $P(-4;2)$.

Відповідь. $A(-2;-6)$, $B(8;2)$, $C(-6;10)$.

20. *Дано три вершини паралелограма* $A(4;2)$, $B(5;7)$, $C(-3;4)$. *Знайти четверту вершину* D, *яка протилежна вершині B.*

21. *Відрізок між точками A (3; 2); B (15; 6) поділити на п'ять рівних частин. Знайти координати точок ділення.*

22. *Обчислити периметр і площу трикутника, якщо A (–2; 1); B (2, – 2); C (8, 6).*

23. *Дано трикутник A (4; 1), B (7, 5), C (– 4, 7). Знайти точку перетину бісектриси кута A з протилежною стороною BC.*

ЛІНІЇ НА ПЛОЩИНІ

Навчальні завдання

***Приклад.* 1.** *Пряму задано рівнянням 3x – 5y + 15 = 0. Перевірити, які з точок A (– 2, 3), B (0, 3), C (5, 6), належать заданій прямій, знайти її рівняння з кутовим коефіцієнтом і у відрізках на осях.*

Для перевірки того, чи лежать точки A, B, C на прямій, підставимо їхні координати в рівняння прямої:

A: $3(-2)-5\cdot 3+15\neq 0$, B: $3\cdot 0-3\cdot 5+15=0$, C: $3\cdot 5-5\cdot 6+15=0$.

Таким чином, точка А не лежить на прямій, а точки В і С лежать на прямій.

Поділимо рівняння прямої почленно на коефіцієнт при у: $\frac{3}{5}x-y+3=0$, *а далі запишемо його у вигляді* $y=\frac{3}{5}x+3$ *— рівняння з кутовим коефіцієнтом.*

Поділивши рівняння почленно на вільний член:

$$\frac{3x}{15}-\frac{5y}{15}+1=0,\ \textit{або}\ \frac{x}{-5}+\frac{y}{3}=1,$$

дістанемо шукане рівняння у відрізках на осях.

Приклад. 2. *Дано дві вершини трикутника А (2, – 3), В (5, 1), рівняння сторони ВС:* $x+2y-7=0$ *і медіани АМ:* $5x-y-13=0$. *Скласти рівняння висоти, опущеної з вершини С, обчислити її довжину, знайти кут трикутника при вершині А.*

Нехай вершина трикутника С (x_1, y_1). *Тоді точка з координатами* $x_2=\frac{5+x_1}{2}; y_2=\frac{1+y_1}{2}$ *лежить на медіані, тобто виконується рівність* $5\left(\frac{5+x_1}{2}\right)-\frac{1+y_1}{2}-13=0$. *Крім того, точка С лежить на прямій ВС. Отже, маємо систему рівнянь для знаходження координат* (x_1, y_1)*:*

$$\begin{cases}5x_1-y_1-2=0\\x_1+2y_1-7=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\\y_1=3.\end{cases}$$

Знайдемо рівняння прямих АВ і АС, використовуючи рівняння прямої (2.16), маємо:

$$AB:\ \frac{y+3}{1+3}=\frac{x-2}{5-2}\Rightarrow y=\frac{4}{3}x-\frac{17}{3};\quad AC:\ \frac{y+3}{3+3}=\frac{x-2}{1-2}\Rightarrow y=-6x+9.$$

Висота проходить через точку С перпендикулярно до прямої АВ. Використаємо умову перпендикулярності двох прямих і знайдемо кутовий коефіцієнт висоти $k_2=-\frac{1}{k_1}=-\frac{3}{4}$. *Використаємо рівняння і знайдемо рівняння висоти:*

$$y-3=-\frac{3}{4}(x-1)\Rightarrow 3x+4y-15=0.$$

Довжину висоти знайдемо як відстань від точки С(1, 3) до прямої АВ.

$$h=\frac{|4\cdot 1-3\cdot 3-17|}{\sqrt{16+9}}=\frac{22}{5}=4{,}4.$$

Щоб обчислити кут А, скористаємось формулою для знаходження кута між двома прямими:

$$\operatorname{tg}\hat{A}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{-6-\frac{4}{3}}{1-6\cdot\frac{4}{3}}=\frac{22}{21};\ \hat{A}=\operatorname{arctg}\frac{22}{21}.$$

Приклад. 3. *Паралельні прямі проходять відповідно через точки O(0, 0) і M(1, 3). Знайти їх рівняння, коли відомо, що відстань між ними дорівнює* $\sqrt{5}$.

Якщо прямі паралельні, то їх кутові коефіцієнти рівні між собою, тому згідно з рівняння шуканих прямих можна записати у вигляді $y=kx,\ y-3=k(x-1)$. *Візьмемо довільну точку, що лежить на першій прямій, наприклад* $(1, k)$. *Тоді згідно з формулою для відстані точки до прямої запишемо:*

$\sqrt{5}=\frac{|k-k-k+3|}{\sqrt{1+k^2}}$, *звідки знайдемо* $k_1=-2,\ k_2=\frac{1}{2}$. *Рівняння прямих:* $y=-2x;\ 2x+y-5=0$ *або* $y=\frac{1}{2}x;\ x-2y+5=0.$

Приклад. **4.** *Записати рівняння бісектрис кутів, утворених прямими* $x+7y-6=0$ *і* $5x-5y+1=0$.

Використаємо відому властивість бісектриси кута про те, що на ній лежить множина точок, рівновіддалених від сторін кута. Нехай M(x, y) — точка, яка належить цій множині. Тоді за формулою відстані від точки до прямої записуємо:

$\frac{|x+7y-6|}{\sqrt{1+49}}=\frac{|5x-5y+1|}{\sqrt{25+25}}$. *Звідси маємо два рівняння бісектрис:* $x+7y-6=5x-5y+1$ *і* $x+7y-6=-5x+5y+1$, *або, після перетворень:* $4x-12y+7=0,\ 6x+2y-5=0.$

Приклад. **5.** *Обчислити площу ромба, знаючи одну з його вершин A(0, –1), точку перетину діагоналей M(4, 4) і точку N(2, 0) на стороні AB.*

Використовуючи (2.16), запишемо рівняння сторони AB:

$\frac{y+1}{1}=\frac{x}{2}$, *або* $x-2y-2=0$. *Знайдемо координати точки C(x, y), яка за властивістю точки перетину діагоналей ромба симетрична точці A відносно точки M. Отже,* $4=\frac{0+x}{2};\ 4=\frac{-1+y}{2}$, *звідки C(8, 9). Висоту ромба знайдемо як відстань від точки C до прямої AB:*

$$h=\frac{|8-18-2|}{\sqrt{5}}=\frac{12}{\sqrt{5}}.$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт діагоналі ромба AC: $k=\frac{9+1}{8-0}=\frac{5}{4}.$ *Кутовий коефіцієнт другої діагоналі дорівнює* $-\frac{4}{5}$, *а її рівняння* $4x+5y-36=0$. *Розв'язуючи систему рівнянь*

$$\begin{cases} x-2y=2 \\ 4x+5y=36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{82}{13} \\ y=\frac{28}{13} \end{cases},$$

знаходимо координати точки $B\left(\frac{82}{13};\frac{28}{13}\right)$. *Довжина сторони ромба* $|AB|=\sqrt{\left(\frac{82}{13}\right)^2+\left(\frac{28}{13}\right)^2}=\frac{41}{13}\sqrt{5}.$

Отже, площа ромба $s=|AB|\cdot h=\frac{41}{13}\sqrt{5}\cdot\frac{12}{\sqrt{5}}=37\frac{11}{13}$.

Приклад. **6.** *Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну з його вершин A(2, – 4) і рівняння бісектрис двох його кутів:* $x+y-2=0;\ \ x-3y-6=0.$

Підставлянням координати точки A в рівняння бісектрис пересвідчимось, що бісектриси не проходять через цю точку. Нехай для визначеності вершина B і вершина C належать відповідно першій і другій бісектрисам. Знайдемо координати точки A′, симетричної точці A відносно бісектриси $x+y-2=0$. *Ця точка буде лежати на прямій BC. Для цього запишемо рівняння перпендикуляра до цієї бісектриси, що проходить через точку A. Маємо:* $y+4=x-2$, *або* $x-y-6=0$. *Знайдемо точку перетину бісектриси і перпендикуляра, розв'язуючи систему* $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$; *координати точки* $A'(x,\ y)$ *знайдемо з виразів* $4=\frac{2+x}{2};\ \ -2=\frac{-4+y}{2}$; $A'(6,0)$. *Аналогічно знайдемо координати точки A″, симетричної точці A, відносно бісектриси* $x-3y-6=0$. $A''\left(\frac{2}{5};\ \frac{4}{5}\right)$. *Рівняння прямої BC знайдемо з (2.16):* $\frac{y}{\frac{4}{5}}=\frac{x-6}{-\frac{28}{5}}\Rightarrow x+7y-6=0.$

Обчислимо координати вершин B і C як координати точок перетину відповідних бісектрис з прямою BC: $x+7y-6=0$. *Дістаємо:* $B\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)$; $C(6;0)$. *З (2.16) маємо рівняння сторін відповідно AB і AC:* $7x+y-10=0$; $x-y-6=0.$

***Приклад.* 7.** *Дано еліпс* $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$*, через точку A (1; 1) провести хорду еліпса, яка поділяється в цій точці навпіл.*

Запишемо рівняння хорди, використовуючи рівняння (2.15) (y – 1) = k (x – 1). Це буде рівняння всіх хорд еліпса, що проходять через точку A. Знайдемо точки перетину цієї прямої з еліпсом, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\\ y-1=k(x-1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(4+9k^2)x^2+18k(1-k)x+9(1-k)^2-36=0\\ y=kx+1-k.\end{cases}$$

За умовою задачі координати точок перетину хорди з еліпсом (x_1, y_1), (x_2, y_2) *мають задовольняти рівності:* $\frac{x_1+x_2}{2}=1$ *і* $\frac{y_1+y_2}{2}=1$*. З теореми Вієта і останньої умови маємо:* $\frac{18(k-1)k}{4+9k^2}=2$*, звідки* $k=-\frac{4}{9}$*. Шукане рівняння хорди набирає вигляду* $y-1=-\frac{4}{9}(x-1)$*, або 4x + 9y – 13 = 0.*

***Приклад.* 8.** *Записати рівняння гіперболи, яка проходить через точку A (6; 9), якщо:*

1) відстань між фокусами дорівнює 8, а відстань між директрисами — 6;

2) директриси задано рівняннями $x=-3\sqrt{2}, x=3\sqrt{2}$ *, а кут між асимптотами — прямий;*

3) ексцентриситет дорівнює ε = 2, а уявна піввісь b = 3;

4) асимптоти задано рівнянням $y=\pm\frac{5}{3}x$ *.*

1) Координати фокусів F_1 *(– c; 0);* F_2 *(c; 0), тому з умови 2c = 8; c = 4, відстань між директрисами* $6=\frac{2a}{\varepsilon}$*. Звідки, враховуючи, що* $\varepsilon=\frac{c}{a}$ *маємо: a = 12, b = c – a = 4. Остаточно* $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$*.*

2) З рівнянь директрис маємо: $\frac{a}{\varepsilon}=3\sqrt{2}$ *, якщо кут між асимптотами прямий, то a = b. Отже, з урахуванням формули* $\frac{b}{a}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$ *маємо* $\varepsilon=\sqrt{2}$ *і a = 6; b = 6. Остаточно записуємо рівняння шуканої гіперболи:* $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{36}=1$*.*

3) З формули, застосованої вище, дістаємо $\frac{3}{a}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$*, звідки* $a=\sqrt{3}$*. Отже,* $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$*.*

4) Точка A належить гіперболі, тому маємо: $\frac{36}{a^2}-\frac{81}{b^2}=1$*. З рівняння асимптот гіперболи випливає співвідношення* $\frac{b}{a}=\frac{5}{3}$*, або* $b=\frac{5}{3}a$*. Підставивши b в останнє співвідношення, дістанемо рівняння для знаходження* a^2*:*

$$\frac{36}{a^2}-\frac{81\cdot 9}{25a^2}=1;\ \ a^2=\frac{171}{25},\ \ b^2=19.$$

Отже, $\frac{25x^2}{171}-\frac{y^2}{19}=1.$

***Приклад.* 9.** *Знайти умову, за якої пряма y = kx + b дотикається до параболи* $y^2 = 2px$*.*

Парабола і пряма будуть дотикатися одна до одної, якщо система рівнянь матиме єдиний розв'язок:

$$\begin{cases}y=kx+b\\ y^2=2px.\end{cases}$$

Виключаючи x із рівнянь системи, дістаємо квадратне рівняння:

$$y^2 - \frac{2p}{k}y + \frac{2pb}{k} = 0.$$

Воно має єдиний розв'язок, якщо D = 0. Звідси випливає:

$$\frac{p^2}{k^2} - \frac{2pb}{k} = 0 \Rightarrow p(p - 2bk) = 0,$$

але $p \neq 0$. Отже, $p = 2bk$ — умова дотику прямої і параболи.

Приклад. 10. *Записати рівняння лінії центрів двох кіл*

$x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ *і* $x^2 + y^2 + 2x - 12y + 1 = 0$.

Знайдемо спочатку координати центрів цих двох кіл, виділивши повні квадрати:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = 25, \text{ або } (x-3)^2 + (y+4)^2 = 25,$$
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 12y + 36 = 36, \text{ або } (x+1)^2 + (y-6)^2 = 36.$$

Отже, координати центра першого кола C_1 (3; – 4), а другого — C_2 (– 1; 6). Скориставшись рівнянням , знайдемо

$$\frac{y+4}{6+4} = \frac{x-3}{-1-3}.$$

$5x + 2y - 7 = 0$ *— шукане рівняння центрів кіл.*

Приклад. 11. *Дослідити рівняння*

$x^2 + 6xy + ay^2 + 3x + by - 4 = 0$ *при різних значеннях параметрів a і b.*

Обчислимо визначники δ і Δ, які визначають тип кривої другого порядку:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a - 9;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & \frac{3}{2} \\ 3 & a & \frac{b}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{b}{2} & 4 \end{vmatrix} = \frac{7}{4}a - \frac{1}{4}(b-9)^2 - \frac{63}{4}.$$

1) a > 9, маємо еліпс, при $7a - (b-9)^2 - 63 > 0$ *— уявний, при* $7a - (b-9)^2 - 63 < 0$ *— дійсний. Якщо* $a = \frac{1}{7}(b-9)^2 + 9$, *то еліпс вироджується в уявні прямі.*

2) a = 9. Маємо криву параболічного типу $\Delta = -\frac{1}{4}(b-9)^2$. *Якщо* $b \neq 9$, *то ця крива — парабола; при a = 9, b = 9 рівняння параболи розпадається на пару паралельних прямих:* $x + 3y + 4 = 0$; $x + 3y - 1 = 0$.

3) a < 9. Маємо гіперболу. Якщо $a = \frac{1}{7}(b-9)^2 + 9$, *то гіпербола розпадається на пару прямих.*

Приклад. 12. *Знайти новий початок координат і кут, на який треба повернути систему координат, щоб дістати канонічний вигляд кривої другого порядку:* $7x^2 + 4xy + 4y^2 - 40x - 3y - 73 = 0$.

Для знаходження координат нового центра розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 7x_0 + 2y_0 = 20 \\ 2x_0 + 4y_0 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 3. \end{cases}$$

Для знаходження кута повороту системи координат скористаємось виразом (2.24)

$$\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}; \quad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Нові значення $a_{11}^* = \frac{23}{5}$; $a_{22}^* = \frac{7}{5}$; *знайдемо* δ *і* Δ; $\delta = 24$, $\Delta = -3864$. *Скориставшись рівнянням канонічного вигляду, знайдемо рівняння кривої* $\frac{23}{5}(x')^2 + \frac{7}{5}(y')^2 = 161$, *або* $\frac{(x')^2}{35} + \frac{(y')^2}{115} = 1$. *Записано канонічне рівняння еліпса в системі координат Ox′y′, центр якої відносно старої системи Oxy перенесено паралельно осям у точку O′ (2; 3), а далі систему з новим центром повернуто на кут* $\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

Завдання для перевірки знань

1. *Скласти рівняння катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, якщо y = 3x + 5 — рівняння гіпотенузи, A (4, – 1) — вершина прямого кута.*

Відповідь. $y = -2x + 7$; $y = \frac{1}{2}x - 3$.

2. *Дано вершини трикутника A (4; 6), B (– 4; 0), C (– 1; – 4). Скласти рівняння: а) трьох його сторін; б) медіани, проведеної з вершини C; в) бісектриси кута B; г) висоти, опущеної з вершини A.*

3. *Дано трикутник з вершинами в точках* $A\left(-\frac{1}{7}; -\frac{3}{28}\right)$, $B(4,\ 3)$, $C(2,\ -1)$. *Обчислити довжини його висот.*

Відповідь. $h_A = \frac{27\sqrt{5}}{28}$.

4. *На осі абсцис знайти точку, яка міститься на відстані a від прямої* $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Відповідь. $\left(0;\ b \pm \sqrt{a^2 + b^2}\right)$.

5. *З точок перетину прямої* $3x + 5y - 15 = 0$ *з осями координат встановлено перпендикуляри до цієї прямої. Знайти їх рівняння.*

Відповідь. $5x - 3y + 9 = 0$; $5x - 3y - 25 = 0$.

6. *Дано дві вершини трикутника A (– 6; 2), B (2; – 2) і H (1; 2) — точку перетину його висот. Обчислити координати третьої вершини.*

Відповідь. C (2; 4).

7. *Знайти рівняння прямої, що проходить через точку (2; – 1) і утворює з віссю Ox удвічі більший кут, ніж кут, що його утворює з тією самою віссю пряма* $x - 3y + 4 = 0$.

Відповідь. $3x - 4y - 10 = 0$.

8. *Рівняння бічних сторін рівнобедреного трикутника y = 3; x – y + 4 = 0. Скласти рівняння основи, якщо вона проходить через початок системи координат.*

Відповідь. $y = \left(-1 \pm \sqrt{2}\right)x$.

9. *Скласти рівняння сторін квадрата, якщо A(2; – 4) — його вершина, M(5; 2) — точка перетину діагоналей.*

Відповідь. $3x + y = 2$; $x - 3y = 14$; $x - 3y = -16$; $3x + y = 32$.

10. *Скласти рівняння сторін трикутника, якщо A(3; 5), B(6; 1) — його вершини, M(4; 0) — точка перетину медіан.*

Відповідь. $4x + 3y = 27$, $x = 3$, $7x - 3y = 39$.

11. *Скласти рівняння прямої, що поділяє відрізок AB, A(– 3; 2), B(5; – 2) навпіл і утворює з відрізком AB кут, удвічі більший, ніж із віссю Ox.*

Відповідь. $x - 2y - 1 = 0$.

12. *Через точку А(5; 2) провести пряму, що відтинає рівні відрізки на осях системи координат.*
Відповідь. $x + y = 7.$

13. *Знайти дотичні до кола* $x^2 + y^2 = 29,$ *що проходить через точку А(7; –3).*
Відповідь. $5x + 2y = 29,\ 2x - 5y = 29.$

14. *У трикутнику А(1; 2), В(3; 7), С(5; – 13) обчислити довжину перпендикуляра, опущеного з вершини В на медіану, проведену з вершини А.*

Відповідь. $\frac{25}{\sqrt{34}}.$

15. *Знайти рівняння прямої, паралельної прямій 12х + 5у — 52 = 0, що міститься від неї на відстані 2 лін. од.*

Відповідь. $12x + 5y - 26 = 0, 12x + 5y - 78 = 0.$

16. *Скласти рівняння прямої, що проходить посередині між прямими* $4x - 6y = 3,\ 2x - 3y = -7.$

Відповідь. $8x - 12y + 11 = 0.$

17. *Знайти точку, симетричну точці А(– 2; – 9) відносно прямої* $2x + 5y = 38.$

Відповідь. (10; 21).

18. *Дано рівняння двох суміжних сторін паралелограма х – у = 1, х – 2у = 0, М(3; – 1) — точка перетину діагоналей. Записати рівняння двох інших сторін паралелограма.*

Відповідь. х – у = 7, х – 2у = 10.

19. *Відоме рівняння 3х + 2у + 6 = 0 однієї сторони кута і*

х – 3у + 5 = 0 — рівняння його бісектриси. Скласти рівняння другої сторони кута.

Відповідь. 6х + 17у =15.

20. *У трикутнику АВС відомі АВ:* $4x + y - 12 = 0,$ *висота ВН:* $5x - 4y = 15,$ *висота АК:*

$2x + 2y - 9 = 0.$ *Записати рівняння сторін АС; ВС.*

Відповідь. $4x + 5y = 20;\ x - y = 3.$

21. *Скласти рівняння сторін трикутника, якщо А(– 4; 2) — одна з його вершин і* $3x - 2y + 2 = 0$

і $3x + 5y - 12 = 0$ *— рівняння двох його медіан.*

Відповідь. $2x + y = 8;\ x - 3y = -10,\ x + 4y = 4.$

22. *Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну з його вершин А(3; – 4) і рівняння висот:* $7x - 2y = 1,\ 2x - 7y = 6.$

Відповідь. $2x + 7y + 22 = 0,\ 7x + 2y - 13 = 0,\ x - y + 2 = 0.$

23. *Знайти центр і радіус кола* $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$.

Відповідь. a = 4; b = – 3; R = 2.

24. *Записати рівняння дотичних, проведених із початку системи координат до кола*

$x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$.

Відповідь. y = 0; 20x – 21y = 0.

25. *На еліпсі* $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ *знайти точку, відстань якої від правого фокуса в чотири рази більша за відстань від лівого фокуса.*

Відповідь. $M_1\left(-\frac{15}{2}, \frac{3\sqrt{7}}{2}\right), M_2\left(-\frac{15}{2}, -\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$.

26. *Еліпс проходить через точку* $P\left(3, \frac{12}{5}\right)$ *і дотикається до прямої 4x + 5y – 25 = 0. Записати рівняння цього еліпса і знайти координати точки дотику.*

Відповідь. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1,\ \left(4; \frac{9}{5}\right);\ \ \frac{16x^2}{225} + \frac{y^2}{16} = 1,\ \left(\frac{9}{4}, \frac{16}{5}\right).$

27. *Знайти рівняння кола, описаного навколо трикутника з вершинами A(7; 7), B(0; 8), C(– 2; 4).*
Відповідь. $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25.$

28. *Записати рівняння кола з центром у точці (6; 7), що дотикається до прямої* $5x - 12y = 24.$
Відповідь. $(x-6)^2 + (y-7)^2 = 36.$

29. *В еліпс* $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ *вписано правильний трикутник так, що одна з його вершин збігається з правим кінцем великої осі. Знайти координати двох інших вершин.*
Відповідь. $\left(\frac{6}{7}; \frac{12\sqrt{3}}{7}\right), \left(\frac{6}{7}; \frac{-12\sqrt{3}}{7}\right).$

30. *Записати рівняння прямої, що дотикається до еліпса* $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ *у точці (2; – 3).*
Відповідь. $x - 2y = 8.$

31. *Знайти рівняння тих дотичних до еліпса* $3x^2 + 8y^2 = 45,$ *відстань яких від центра еліпса дорівнює 3. Відповідь.* $\pm 3x \pm 4y + 15 = 0.$

32. *Гіпербола дотикається до прямої* $x - y = 2$ *у точці (4; 2). Скласти рівняння гіперболи.*
Відповідь. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1.$

33. *До параболи* $y^2 = 12x$ *провести дотичну паралельно прямій* $2x + y - 7 = 0.$
Відповідь. $4x + 2y + 3 = 0.$

34. *Знайти кут між асимптотами гіперболи, в якої:*
а) ексцентриситет $\varepsilon = 2.$

б) відстань між фокусами вдвічі більша за відстань між директрисами.
Відповідь. а) 120°; б) 90°.

35. *Записати рівняння прямої, що дотикається до гіперболи* $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ *у точці (5, – 4).*
Відповідь. x + y =1.

36. *Знайти найкоротшу відстань параболи* $y^2=64x$ *до прямої* $4x+3y+46=0.$ *Відповідь. 2.*

37. *Визначити типи таких кривих:*
а) $x^2+6xy+y^2+6x+2y-1=0,$
б) $3x^2+2xy+3y^2+4x+4y-4=0,$
в) $x^2+4xy+3y^2+2x-2y=0,$
г) $x^2+4xy+4y^2+2x-2y-1=0,$
д) $9x^2-6xy+y^2-6x+2y=0.$
Відповідь. а) гіпербола; б) еліпс; в) пара прямих, що перетинаються; г) парабола; д) пара паралельних прямих.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ДОМАШНІ ЗАВДАННЯ

ЗАВДАННЯ 12.

Дано: вектори $\overline{P}=\left(p_x,\ p_y,\ p_z\right);\ \overline{Q}=\left(q_x;q_y;q_z\right);\ \overline{R}=\left(r_x,r_y,r_z\right);\quad \overline{X}=\left(x_x,x_y,x_z\right)$. Потрібно знайти:

1. $\left(2\overline{P}+3\overline{Q}\right)\cdot\left(\overline{X}-2\overline{R}\right);$ 2. $\left(\overline{P}-2\overline{R}\right)\times\left(\overline{Q}+3\overline{X}\right);$

3. орт вектора $\overline{e}=\overline{P}+\overline{R}-\overline{X};$ 4. $\cos\left(\overline{P}+\overline{Q}\ \widehat{,}\ \overline{R}-\overline{X}\right);$

5. $np_{\overline{R}}\left(\overline{Q}+2\overline{P}\right);$ **6.** $\left(\overline{P}\cdot\overline{Q}\right)\cdot\overline{R};$

7. довжини діагоналів паралелограма, побудованого на векторах $\overline{P}$ і $\overline{Q}$;

8. площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{R}$ і $\overline{X}$;

9. $\left(\overline{P}\times\overline{Q}\right)\cdot\overline{R};$ чи будуть вектори $\overline{P},\overline{Q},\overline{R}$ компланарними? Яку трійку вони утворюють?

10. Чому дорівнює об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{P},\overline{Q},\overline{R}$?

11. Чи утворюють вектори $\overline{P},\overline{Q},\overline{R}$ базис? Якщо утворюють, то знайти розклад вектора $\overline{X}$ по цьому базису.

ЗАВДАННЯ 12.

1	*X*=(-1,0,2)	*P*=(1,-1,0)	*Q*=(1,2,0)	*R*=(1,-4,2)
2	*X*=(4,4,-6)	*P*=(1,1,0)	*Q*=(0,-1,2)	*R*=(2,-1,0)
3	*X*=(8,3,2)	*P*=(4,1,1)	*Q*=(1,1,-1)	*R*=(2,0,3)
4	*X*=(1,0,2)	*P*=(-2,2,0)	*Q*=(-5,2,-2)	*R*=(-3,2,2)
5	*X*=(0,1,8)	*P*=(1,0,4)	*Q*=(-2,1,2)	*R*=(1,0,2)
6	*X*=(-2,4,7)	*P*=(0,1,2)	*Q*=(1,0,1)	*R*=(-1,2,4)
7	*X*=(6,12,-1)	*P*=(1,3,0)	*Q*=(2,-1,1)	*R*=(0,-1,2)
8	*X*=(1,-4,4)	*P*=(2,1,-1)	*Q*=(0,3,2)	*R*=(1,-1,1)
9	*X*=(-9,5,5)	*P*=(4,1,1)	*Q*=(2,0,-3)	*R*=(-1,2,1)
10	*X*=(-5,-5,5)	*P*=(-2,0,1)	*Q*=(1,3,-1)	*R*=(0,4,1)
11	*X*=(13,2,7)	*P*=(5,1,0)	*Q*=(2,-1,3)	*R*=(1,0,-1)
12	*X*=(-19,-1,7)	*P*=(0,1,1)	*Q*=(-2,0,1)	*R*=(3,1,0)
13	*X*=(3,-1,4)	*P*=(1,0,2)	*Q*=(0,1,1)	*R*=(2,-1,4)
14	*X*=(3,3.-1)	*P*=(3,1,0)	*Q*=(-1,2,1)	*R*=(-1,0,2)
15	*X*=(-1,7,-4)	*P*=(-1,2,1)	*Q*=(2,0,3)	*R*=(1,1,-1)
16	*X*=(6,5,-14)	*P*=(1,1,4)	*Q*=(0,-3,2)	*R*=(2,1,-1)
17	*X*=(6,-1,7)	*P*=(1,-2,0)	*Q*=(-1,1,3)	*R*=(1,0,4)
18	*X*=(5,15,0)	*P*=(1,0,5)	*Q*=(-1,3,2)	*R*=(0,-1,1)
19	*X*=(2,-1,11)	*P*=(1,1,0)	*Q*=(0,1,-2)	*R*=(1,0,3)
20	*X*=(11,5,-3)	*P*=(1,0,2)	*Q*=(-1,0,1)	*R*=(2,5,-3)
21	*X*=(8,0,5)	*P*=(2,0,1)	*Q*=(1,1,0)	*R*=(4,1,2)
22	*X*=(3,1,8)	*P*=(0,1,3)	*Q*=(1,2,-1)	*R*=(2,0,-1)
23	*X*=(8,1,12)	*P*=(1,2,-1)	*Q*=(3,0,2)	*R*=(-1,1,1)
24	*X*=(-9,-8,-3)	*P*=(1,4,1)	*Q*=(-3,2,0)	*R*=(1,-1,2)
25	*X*=(-5,9,-13)	*P*=(0,1,-2)	*Q*=(3,-1,1)	*R*=(4,1,0)
26	*X*=(-15,5,6)	*P*=(0,1,5)	*Q*=(3,2,-1)	*R*=(-1,1,0)
27	*X*=(8,9,4)	*P*=(1,0,1)	*Q*=(0,-2,1)	*R*=(1,3,0)
28	*X*=(23,-14,-30)	*P*=(2,1,0)	Q=(1,-1,0)	*R*=(-3,2,5)
29	*X*=(3,1,3)	*P*=(2,1,0)	*Q*=(1,0,1)	*R*=(4,2,1)
30	*X*=(-1,7,0)	*P*=(0,3,1)	*Q*=(1,-1,2)	*R*=(2,-1,0)

ЗАВДАННЯ 13.

Задані координати точок *A* і *B*

Потрібно:

1. Скласти рівняння прямої *AB*, записати його в загальному вигляді, через кутовий коефіцієнт та у відрізках (якщо це можливо);

2. Скласти рівняння перпендикулярної до *AB* прямої, що проходить через середину відрізку *AB*.

1	*A*(-4,1)	*B*(12,13)	**11**	*A*(-3,2)	*B*(9,2)	**21**	*A*(-6,8)	*B*(18,4)
2	*A*(-4,1)	*B*(8,17)	**12**	*A*(-3,2)	*B*(13,10)	**22**	*A*(-7,5)	*B*(25,13)
3	*A*(-4,2)	*B*(12,14)	**13**	*A*(-12,3)	*B*(42,9)	**23**	*A*(-5,4)	*B*(23,20)
4	*A*(-4,2)	*B*(8,18)	**14**	*A*(-1,4)	*B*(11,0)	**24**	*A*(-2,4)	*B*(18,24)
5	*A*(-4,4)	*B*(12,16)	**15**	*A*(-1,4)	*B*(15,4)	**25**	*A*(-9,8)	*B*(33,16)
6	*A*(-4,4)	*B*(8,20)	**16**	*A*(-8,4)	*B*(16,22)	**26**	*A*(-5,4)	*B*(35,36)
7	*A*(-6,3)	*B*(10,15)	**17**	*A*(-7,3)	*B*(25,3)	**27**	*A*(-6,8)	*B*(18,32)
8	*A*(-8,4)	*B*(4,20)	**18**	*A*(-1,4)	*B*(11,4)	**28**	*A*(-8,7)	*B*(28,21)
9	*A*(-6,6)	*B*(10,18)	**19**	*A*(-5,2)	*B*(27,14)	**29**	*A*(-3,8)	*B*(21,4)
10	*A*(-8,8)	*B*(4,24)	**20**	*A*(-7,4)	*B*(37,12)	**30**	*A*(-7,9)	*B*(17,3)

ЗАВДАННЯ 14.

Задані координати точок *A*,*B*,*C*,*D*. Скласти рівняння площини *ABC* і знайти відстань від точки *D* до неї. Знайти точку *D'* симетричну точці *D* відносно площини *ABC*.

1	*A*(1,3,6)	*B*(2,2,1)	*C*(-1,0,1)	*D*(-4,6,-3)
2	*A*(-2,2,8)	*B*(2,4,6)	*C*(-1,5,8)	*D*(3,-3,-2)
3	*A*(7,2,-4)	*B*(7,-1,2)	*C*(6,3,-7)	*D*(3,-8,-6)
4	*A*(2,1,4)	*B*(-1,5,-2)	*C*(-7,-3,2)	*D*(-3,3,6)
5	*A*(-1,-5,2)	*B*(-6,0,-3)	*C*(3,6,-3)	*D*(-10,6,7)
6	*A*(0,-1,-1)	*B*(3,-2,3)	*C*(0,2,-7)	*D*(-30,10,6)
7	*A*(5,2,0)	*B*(2,5,0)	*C*(1,2,4)	*D*(-1,1,1)
8	*A*(2,-1,-2)	*B*(1,2,1)	*C*(5,0,-6)	*D*(-10,9,-7)
9	*A*(-2,0,-4)	*B*(-1,7,1)	*C*(4,-8,-4)	*D*(1,-4,6)
10	*A*(1,3,0)	*B*(4,-1,2)	*C*(3,0,1)	*D*(4,3,0)
11	*A*(-2,3,-5)	*B*(4,0,-3)	*C*(-3,4,-6)	*D*(1,1,1)
12	*A*(2,-1,2)	*B*(1,2,-1)	*C*(3,2,1)	*D*(-4,2,5)
13	*A*(1,1,2)	*B*(-1,1,3)	*C*(2,-2,4)	*D*(-1,0,-2)
14	*A*(2,3,1)	*B*(4,1,-2)	*C*(6,3,7)	*D*(7,5,-3)
15	*A*(1,1,-1)	*B*(2,3,1)	*C*(3,2,1)	*D*(5,12,-8)
16	*A*(1,5,-7)	*B*(-3,6,3)	*C*(-2,7,3)	*D*(-4,8,-12)
17	*A*(-4,2,6)	*B*(2,-3,0)	*C*(-10,5,8)	*D*(-9,-5,5)
18	*A*(-1,2,-3)	*B*(4,-1,0)	*C*(2,1,-2)	*D*(3,4,5)
19	*A*(4,-1,3)	*B*(-2,1,0)	*C*(0,-5,1)	*D*(3,2,-6)
20	*A*(2,-3,1)	*B*(4,-1,5)	*C*(7,2,-1)	*D*(1,2,3)
21	*A*(1,2,0)	*B*(1,-1,2)	*C*(0,1,-1)	*D*(-3,0,1)
22	*A*(1,0,2)	*B*(1,2,-1)	*C*(2,-2,1)	*D*(2,1,0)
23	*A*(1,2,-3)	*B*(1,0,1)	*C*(-2,-1,6)	*D*(-2,-5,-4)
24	*A*(3,10,-1)	*B*(-2,3,-5)	*C*(-6,0,-3)	*D*(1,-1,2)
25	*A*(-1,2,4)	*B*(-1,-2,-4)	*C*(-3,0,-1)	*D*(0,6,2)
26	*A*(0,-3,1)	*B*(-4,1,2)	*C*(2,-1,5)	*D*(3,1,-4)
27	*A*(1,3,0)	*B*(4,-1,2)	*C*(3,0,1)	*D*(-4,3,5)
28	*A*(-2,-1,-1)	*B*(0,3,-40)	*C*(4,1,-4)	*D*(8,9,19)
29	*A*(-3,-5,6)	*B*(3,1,-4)	*C*(0,-3,0)	*D*(-7,20,-13)
30	*A*(2,-4,-3)	*B*(5,-6,0)	*C*(-1,3,-3)	*D*(-10,-8,11)

ЗАВДАННЯ 15.

Побудувати область D, визначену наданими нерівностями. Знайти координати вершин утвореного многокутника

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 7 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_2 \le 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \\ 2x_1 - x_2 \le -1 \\ x_1 - 2x_2 \le 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - x_2 \le 0 \\ 2x_1 + x_2 \le 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 0 \\ 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 - x_2 \le 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 \le 8 \\ x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 0 \\ 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 - x_2 \le 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 32 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 36 \\ x_1 \le 8 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 7 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_2 \le 1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14 \\ 2x_1 + x_2 \le 13 \\ 3x_1 - x_2 \le 12 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \ge 10 \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10 \\ x_2 \le 5 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 10 \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 20 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ x_1 - x_2 \le 4 \\ 4x_1 + 7x_2 \le 28 \end{cases}$

24. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 9 \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 27 \\ 2x_1 + x_2 \le 14 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 3 \\ -3x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 + x_2 \ge 4 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \ge 4 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10 \\ 7x_1 + 4x_2 \le 28 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 4 \\ x_1 - 2x_2 \ge -4 \\ x_1 + x_2 \ge 4 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 \le 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \ge 2 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -3 \\ 6x_1 + 7x_2 \le 42 \\ x_1 + x_2 \ge 4 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 \le 1 \\ 4x_1 - x_2 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 \le 1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 1 \\ x_1 + 2x_2 \le 5 \\ x_1 + 3x_2 \le 10 \end{cases}$

12. $\begin{cases} -x_1 + 14x_2 \le 30 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 6 \\ -2x_1 + x_2 \le 3 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 - x_2 \le 3 \\ -x_1 + x_2 \le 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 1 \\ 2x_1 - x_2 \le 1 \\ 2x_1 - x_2 \le 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - 2x_2 \le 3 \\ 2x_1 - x_2 \le 2 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 - x_2 \le 0 \\ 3x_1 + 5x_2 \le 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ -x_1 + 2x_2 \le 3 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 - x_2 \le 0 \\ x_2 \le 2 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ -x_1 + 2x_2 \le 3 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 1 \\ 2x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 - x_2 \le 1 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 \ge 7 \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 10 \\ 7x_1 + x_2 \ge 7 \end{cases}$

31. $\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 \le 80 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ x_1 + 4x_2 \ge 4 \end{cases}$

32. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 14 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 15 \\ 5x_1 + 3x_2 \ge 21 \end{cases}$

33. $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 3 \\ 5x_1 + x_2 \ge 5 \\ x_2 \le 5 \end{cases}$

34. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 8 \\ x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ x_1 - x_2 \le 3 \end{cases}$

35. $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1 \\ -5x_1 + x_2 \le 0 \\ x_1 + x_2 \le 6 \end{cases}$

36. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 7 \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 5 \\ x_1 + x_2 \le 6 \end{cases}$

37. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ 3x_1 + x_2 \ge 3 \end{cases}$

38. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ -3x_1 + 2x_2 \ge 3 \end{cases}$

39. $\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -3 \\ 6x_1 + 7x_2 \le 42 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 6 \end{cases}$

40. $\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \le 16 \\ x_1 + 3x_2 \ge 2 \\ 2x_1 + 7x_2 \le 9 \end{cases}$