МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
Кафедра вищої математики та моделювання систем

Методичні вказівки
для проведення практичних занять та самостійної роботи здобувачів

«Вища математика»
Розділ «Функції багатьох змінних»

Для здобувачів вищої освіти за освітнім ступенем бакалавра за спеціальностями:
– 281 Публічне управління та адміністрування,
– 073 Менеджмент.
Інституту бізнесу, економіки та інформаційних технологій (ІБЕІТ)

Одеса 2022

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
Кафедра вищої математики та моделювання систем

Методичні вказівки
для проведення практичних занять та самостійної роботи здобувачів

«Вища математика»
Розділ «Функції багатьох змінних»

Для здобувачів вищої освіти за освітнім ступенем бакалавра за спеціальностями:
– 281 Публічне управління та адміністрування,
– 073 Менеджмент.
Інституту бізнесу, економіки та інформаційних технологій (ІБЕІТ)

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики
та моделювання систем
Протокол № 9 від 21.04.22 р.

Одеса 2022

Методичні вказівки для проведення практичних занять та самостійної роботи здобувачів. «Вища математика». Розділ «Функції багатьох змінних» Для здобувачів вищої освіти за освітнім ступенем бакалавра за спеціальностями: – 281 Публічне управління та адміністрування, – 073 Менеджмент. Інституту бізнесу, економіки та інформаційних технологій (ІБЕІТ) / Укладач: О.В. Жарова. – Одеса: НУ "ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА", 2022 - 23 с.

Укладачі: О.В. Жарова, канд. фіз.-мат. наук, доц.

ЗМІСТ

Одеса 2022

Мета практичних занять – організація детального розгляду окремих теоретичних положень дисципліни; формування вмінь та навичок їх практичного застосування шляхом виконання здобувачами індивідуальних завдань.

В ході практичних занять відбувається розширення, поглиблення й деталізація наукових знань, отриманих здобувачами на лекціях та в процесі самостійної роботи і спрямованих на підвищення рівня засвоєння навчального матеріалу, прищеплення умінь і навичок, розвиток наукового мислення та усного мовлення здобувачів.

В результаті проведення практичних занять здобувач повинен:

- оволодівати необхідним математичним апаратом, його основними положеннями, прийомами, методами (технікою виконання матричних операцій; аналітичними методами розв'язання задач; операцією диференціювання);
- вміти дати математичний опис (моделювати) економічних процесів з умови задачі, починаючи від простого моделювання у вигляді нескладних функціональних залежностей і кінчаючи функціональними рівняннями, аналізувати отриману математичну модель, з'ясовувати реальний зміст параметрів, з якими припущеннями математична модель описує реальний процес, аналізувати отриманий результат).

Самостійна робота є основним засобом засвоєння здобувачем навчального матеріалу в час, вільний від обов'язкових навчальних занять.

Співвідношення обсягів аудиторних занять і самостійної роботи здобувачів визначається навчальним планом підготовки бакалаврів спеціальності 281 «Публічне управління та адміністрування», з урахуванням специфіки та змісту дисципліни, її місця, значення і дидактичної мети в реалізації освітньо-професійної програми.

– РОЗПОДІЛ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ ЗДОБУВАЧА

– 1 семестр

№ зп	Зміст роботи	Кількість годин
1	Самостійне опрацювання теоретичного матеріалу	34
2	Підготовка до практичних занять	27
3	Підготовка до екзамену	30
	Разом	91

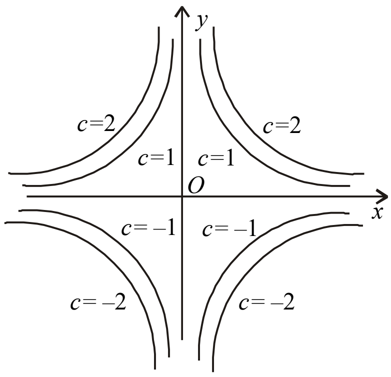
Розділ 5

ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Приклад.

Побудувати лінії рівня функції $z = x^2 y$.

Рівняння ліній рівня має вигляд $x^2 y = c$ *або* $y = c/x^2$. *Узявши* $c = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, *дістанемо сім'ю ліній рівня (рис.).*

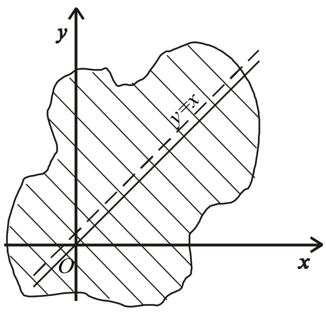


Приклад.

Знайти область визначення функції двох змінних та надати її геометричну інтерпретацію:

$$z = \frac{2x + y}{x - y}.$$

Функція невизначена, якщо $x = y$. *Геометрично це означає, що область визначення складається із двох напівплощин, одна з яких лежить вище, а друга — нижче від прямої* $y = x$



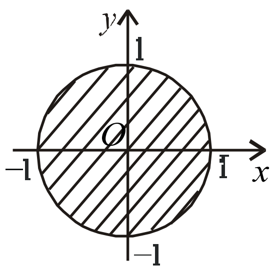
Приклад.

Знайти область визначення функції двох змінних та надати її геометричну інтерпретацію:

$z = \sqrt[4]{1 - x^2 - y^2}$.

Функція визначена, якщо $1 - (x^2 + y^2) \geq 0$, *тобто* $x^2 + y^2 \leq 1$.

Це є коло з центром (0; 0) та радіусом 1 (рис.).

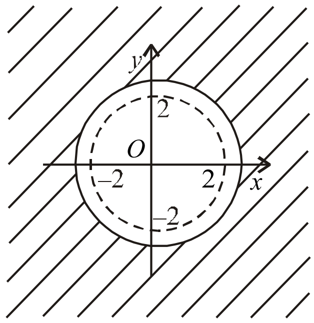


Приклад.

Знайти область визначення функції двох змінних та надати її геометричну інтерпретацію:

$z = \ln\left(x^2 + y^2 - 4\right)$.

Функція визначена, якщо $x^2 + y^2 - 4 > 0$, *тобто* $x^2 + y^2 > 4$ *(рис.).*

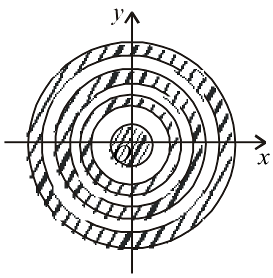


Приклад.

Знайти область визначення функції двох змінних та надати її геометричну інтерпретацію:

$z = \sqrt{\sin \pi\left(x^2 + y^2\right)}$.

Функція визначена, якщо $\sin \pi\left(x^2 + y^2\right) \geq 0$, *тобто* $2n \leq x^2 + y^2 \leq \leq 2n + 1 \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ *(рис.).*



Завдання для перевірки знань

1. *Знайти та зобразити область визначення функції двох змінних:*

1) $u = \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y}$;
2) $u = \sqrt{4x^2 - y^2 - 4y}$;
3) $u = \ln\left(x \big/ \sqrt{1 - x - y} \right)$;
4) $u = \sqrt{1 - 2|x| - |y|}$;
5) $u = \ln\left(y^2 - 4x + 8\right)$;
6) $u = \arcsin \dfrac{y - 1}{x}$;
7) $u = \sqrt{x - \sqrt{y}}$;
8) $u = \sqrt{\dfrac{x^2 + 2x + y^2}{x^2 - 2x + y^2}}$;
9) $u = \sqrt{x \sin y}$;
10) $u = \ln x - \ln \cos y$;
11) $u = \arcsin\left[2y\left(1 + x^2\right) - 1\right]$;
12) $u = \operatorname{ctg} \pi(x + y)$.

2. *Довести, що областю визначення функції, яка задана формулою* $u = \arcsin x \arcsin(2x + y) \arcsin(3x + 2y + z)$, *є замкнений паралелепіпед, та знайти його вершини.*

3. *Знайти область визначення функції двох змінних і встановити, чи буде вона неперервною в області визначення*

$$u = \arccos \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$$

.

4. *Побудувати лінії, що відповідають рівнянням даних функцій:*

1) $z = x + y$; 3) $z = (1 + x + y)^2$;

2) $z = \sqrt{xy}$; 4) $z = 1 - |x| - |y|$.

ДИФЕРЕНЦІЙОВАНІСТЬ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Приклад.

Знайти повний диференціал функції двох змінних:

$$z = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{x-y}.$$

Знайдемо $\frac{\partial z}{\partial x}$ *і* $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+y}{x-y}\right)'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{-2y}{(x-y)^2} = \frac{-y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+y}{x-y}\right)'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Отже, $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$.

Приклад.

Задано функцію $z = \ln\left(x^2 + 4y^2\right)$. *Знайти* $\overrightarrow{\text{grad} z}$ *в точці A (1; 1) і похідну за напрямом від точки A (1; 1) до точки B (6; 4).*

Знайдемо значення частинних похідних у точці (1; 1)

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1;1)} = \left.\frac{2x}{x^2+4y^2}\right|_{(1;1)} = \frac{2}{5}, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1;1)} = \left.\frac{8y}{x^2+4y^2}\right|_{(1;1)} = \frac{8}{5}.$$

Підставивши знайдені значення частинних похідних у вираз градієнта, дістанемо $\overrightarrow{\text{grad} z} = \frac{2}{5}\vec{i} + \frac{8}{5}\vec{j}$.

Визначимо одиничний вектор $\vec{e}$, *за напрямом якого обчислюється похідна:*

$$\vec{e} = \frac{(x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} = \frac{5}{\sqrt{34}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{34}}\vec{j}.$$

Знайдемо шукану похідну за напрямом:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A e_x + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A e_y = \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{\sqrt{34}} + \frac{8}{5}\cdot\frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{\sqrt{34}}{5}.$$

Приклад.

Знайти dz, *якщо* $xyz = x + y + z$.

Як відомо, $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, *отже, спочатку знайдемо частинні похідні* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *і* $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Функція $F(x, y, z) = xyz - x - y - z$. *Тоді*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz - 1, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = xz - 1, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = xy - 1.$$

За формулами маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yz-1}{xy-1}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xz-1}{xy-1}.$$

Отже, $dz=-\frac{1}{xy-1}\left[(yz-1)dx+(xz-1)dy\right]$.

Приклад.

Знайти якобіан перетворення з координатними функціями $y_1=2\cos x_1\cos x_2$, $y_2=2\cos x_1\sin x_2$, $y_3=\sqrt{2}\sin x_3$.

Координатні функції неперервно-диференційовані, а отже, частинні похідні від них існують у кожній точці і відповідний якобіан такий:

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3}\end{vmatrix}=4\sqrt{2}\cos x_3\begin{vmatrix}\sin x_1\cos x_2 & \sin x_2\cos x_1\\ \sin x_1\sin x_2 & \cos x_1\cos x_2\end{vmatrix}=$$

$$=4\sqrt{2}\cos x_3\sin x_1\cos x_1\left(\cos^2 x_2-\sin^2 x_2\right)=2\sqrt{2}\cos x_3\sin 2x_1\cos 2x_2.$$

Приклад.

Знайти рівняння дотичних площин до поверхні

$$x^2+y^2-z^2+1=0$$

у точках перетину її з прямою $x=y=2$.

Пряма перетинає поверхню в точках A (2; 2; 3) і B (2; 2; – 3). Знайдемо частинні похідні функції $F=x^2+y^2-z^2+1$ *в цих точках:*

$$F'_x|_A=4,\quad F'_y|_A=4,\quad F'_z|_A=-6,$$

$$F'_x|_B=4,\quad F'_y|_B=4,\quad F'_z|_B=6.$$

За формулою дістанемо:

$$4(x-2)+4(y-2)-6(z-3)=0,$$

$$4(x-2)+4(y-2)+6(z+3)=0,$$

або

$$2x+2y-3z+1=0,$$

$$2x+2y+3z+1=0.$$

Завдання для перевірки знань

1. *Знайти частинні похідні першого порядку.*

1) $u=xy+yz+zx$; 2) $u=z/x+x/z$;

3) $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; 4) $u=y/z+\operatorname{arctg} z/x+\operatorname{arctg} x/z$;

5) $u=\left(x/y\right)^z$; 6) $z=x\sqrt{y}+\frac{y}{\sqrt[3]{x}}$;

7) $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$*;*

8) $z=\arcsin\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$*;*

9) $z=e^{-\frac{x}{y}}$*;*

10) $z=xy\ln(x+y)$*;*

11) $z=(1+\log_y x)^{10}$*;*

12) $z=xy\,e^{\sin\pi^2 xy}$*;*

13) $z=\sqrt{\frac{1-\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}}}$*;*

14) $z=\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{xy}\right)^2}$*;*

15) $z=\arcsin\frac{x+y}{xy}$*;*

16) $z=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)$*;*

17) $u=\operatorname{arctg}(x-y)^z$*;*

18) $z=\frac{x\cos y-y\cos x}{1+\sin x+\sin y}$*;*

19) $z=xy^3+3x^4y^5+10y^4$*;*

20) $z=\frac{xy^2}{x^3+y^2}$*;*

21) $z=\sqrt[3]{x^3+y^3}$*;*

22) $u=\ln\frac{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

2. *Розв'язати систему рівнянь* $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$*, якщо*

$$f(x;y)=xy\sqrt{9-x^2-y^2}\,.$$

3. *Знайти* $\Delta f(x;y)$ *і* $df(x;y)$ *для функції* $f(x;y)=x^3-y^3$.

4. *Знайти повний диференціал функції* $f(x;\ y)$ *у заданій точці, якщо:*

1) $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$*, а задана точка (1; 1); (0; 1);*

2) $f(x;y)=\sqrt{xy+\frac{x}{y}}$*, а задана точка (2; 1);*

3) $f(x;y)=\frac{\cos(x-2y)}{\cos(x+2y)}$*, а задана точка* $\left(\frac{\pi}{4};\pi\right)$.

4°. *Знайти повний диференціал даних функцій:*

1) $z=x^3y^4-x^4y^4+x^4y^3$*;*

2) $z=\frac{x+y}{x-y}$*;*

3) $z=\sin(xy)$*;*

4) $z=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$*;*

5) $z=\arcsin\frac{x}{y}$*;*

6) $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.

5. *Знайти похідну функції* $z=x^2-xy+y^2$ *у точці M (1; 1) за напрямом* $\vec{l}=6\vec{i}+8\vec{j}$.

Відповідь. $\left.\left(\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right)\right|_M=\frac{7}{5}$.

6. Знайти абсолютну величину і напрям градієнта функції $u=\frac{1}{r}$, *де* $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ *у точці* $M(x_0,y_0,z_0)$.

Відповідь. $\left|\overrightarrow{\text{grad}u}\right|_M=\frac{1}{r_0^2}$, $\cos\alpha=-\frac{x_0}{r_0}$, $\cos\beta=-\frac{y_0}{r_0}$, $\cos\gamma=-\frac{z_0}{r_0}$, $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$.

7. Знайти y', *якщо* $x^2+y^2+\ln\left(x^2+y^2\right)=a^2$.

Відповідь. $y'=-\frac{x}{y}$.

8. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, *якщо* $x+y+z=e^z$.

Відповідь. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+y+z-1}$.

8°. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$, *якщо* $z=x+\operatorname{arctg}\frac{y}{z-x}$.

Відповідь. 1.

9. Знайти похідну функції f *у точці* M *за заданим напрямом* $\vec{l}$, *якщо:*

1) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$, $M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\vec{l}$ *— напрям зовнішньої нормалі до кола* $x^2+y^2=2x$ *у точці* M;

2) $f(x;\ y)=\operatorname{tg}xz$, $M\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4};\ 1\right)$ *за напрямом градієнта функції* $f(x;y)=\sin yz$ *у точці* M.

10. Записати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні в заданій точці.

1) $z=xy$, *(2; 1; 2);*

2) $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, *(0; 1; 0);*

3) $z=e^{x\cos y}$, *(1; 0; e);*

4) $xy^2+z^3=12$, *(1; 2; 2);*

5) $e^z-z+xy=3$, *(2; 1; 0);*

6) $z=y+\ln\left(\frac{x}{z}\right)$, *(1; 1; 1);*

7) $x^3+y^3+z^3+xyz=6$, *(1; 2; – 1);*

8) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $(x_0;\ y_0;\ z_0)$;

9) $z=\operatorname{arctg}\left(y/x\right)$, $\left(1;\ 1;\ 5/4\right)$;

10) $z=\sqrt{x^2+y^2}-xy$, *(– 3; 4; 17).*

10. Записати рівняння дотичних площин до поверхонь, які паралельні даній прямій або площині:

1) $x^2+2y^2+z^2=1$, $x-y+2z=0$;

2) $z^2+xy+xz=1$, $x-y+2z=1$;

3) $x^2-y^2=3z$, *M (0; 0; –1),* $x=2y=z$;

4) $90x^2+160y^2+576z^2=2880$, *M (12; – 3; –1),* $x=0,\ \ y=0$.

11. Знайти абсолютну величину градієнта функції

$$f(x;y;z)=10^{-3}\sin\left(\pi 10^6\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

у точці (2; 1; 2).

12. *Знайти кут між градієнтами функції* $f(x;\ y)$ *у точках A і B, якщо:*

1) $f(x;y)=\ln\left|\frac{y}{x}\right|$, $A\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}\right)$, $B(1;\ -1)$;

2) $f(x;y)=\arcsin\frac{x}{x+y}$, $A(1;\ 1)$, $B(3;\ 4)$.

13. *Знайти якобіан відображення:*

1) $u=x(x^2-3y^2)$, $v=y(3x^2-y^2)$;

2) $u=e^x\cos y$, $v=e^{-x}\sin y$.

14. *Знайти частинні похідні другого порядку функції* $f(x;y)$, *якщо:*

1) $f(x;y)=e^{xy}$; 2) $f(x;y)=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$;

3) $f(x;y)=\frac{x}{x+y}$; 4) $f(x;y)=(xy)^{x+y}$;

5) $f(x;y)=e^{xe^y}$; 6) $f(x;y)=\sin^2(ax+b)$;

7) $f(x;y)=y^{\ln x}$; 8) $f(x;y)=\frac{x-y}{x+y}$;

9) $f(x;y)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$; 10) $f(x;y)=\arcsin(xy)$.

15. *Знайти диференціал другого порядку функції* $z=f(x;y)$, *якщо:*

1) $f(x;y)=x(1+y)$; 2) $f(x;y)=\frac{1}{y}e^{xy}$; 3) $f(x;y)=y\ln x$;

4) $z=\ln(x-y)$; 5) $z=\frac{1}{2(x^3+y^2)}$;

6) $z=x\sin^2 y$; 7) $z=e^{x^2y}$;

8) $z=\sin(4x+2y)$; 9) $z=\sin(x^3+y^2)$;

10) $z=x\ln(xy)$; 11) $z=x^3\sin y+y^3\sin x$;

12) $z=e^{x^2}\sin y^2$; 13) $z=(x^2+y^2)e^{x+y}$;

14) $z=xye^{x+y}$; 15) $z=\frac{x^2-y}{x-y^2}$.

Дослідження функції двох змінних

Приклад.

Знайти екстремум функції $z=\frac{1}{2}xy+(47-x-y)\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)$.

1) Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{12}y-\frac{2}{3}x+\frac{47}{3},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{2}y-\frac{1}{12}x+\frac{47}{4}.$$

2) Користуючись необхідними умовами, знаходимо стаціонарні точки:

$$\begin{cases}-\frac{1}{12}y-\frac{2}{3}x+\frac{47}{3}=0\\ -\frac{1}{2}y-\frac{1}{12}x+\frac{47}{4}=0\end{cases}\quad \text{або}\quad \begin{cases}8x+y=188\\ x+6y=141\end{cases}.$$

Звідси $x=21$, $y=20$.

Стаціонарна точка $M(21,\ 20)$.
3) Знайдемо похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2}{3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{12}.$$

$$\Delta = AC - B^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{144} > 0.$$

Оскільки $A < 0$, *то в точці* M *функція має максимум:*

$$z_{\max} = \frac{21}{2} \cdot 20 + (47 - 21 - 20)\left(\frac{21}{3} + \frac{20}{4}\right) = 282.$$

Приклад.
Знайти екстремум функції $z = xy$ *за умови, що* x *і* y *задовольняють рівняння* $2x + 3y - 5 = 0$.

Розглянемо функцію Лагранжа $u = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$.

Маємо: $\frac{\partial u}{\partial x} = y + 2\lambda$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x + 3\lambda$.

Із системи рівнянь (необхідні умови екстремуму)

$$\begin{cases} y + 2\lambda = 0 \\ x + 3\lambda = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

знаходимо $\lambda = -\frac{5}{12}$, $x = \frac{5}{4}$, $y = \frac{5}{6}$.

Обчислимо другий диференціал функції Лагранжа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$d^2 u = 2dxdy.$$

Знайдемо перший диференціал функції $\varphi(x, y)$: $d\varphi = 2dx - 3dy$.
Диференціали dx *і* dy *задовольняють умову*

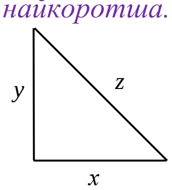
$$2dx - 3dy = 0;$$

$$dx = \frac{3}{2} dy.$$

При виконанні цієї умови другий диференціал функції Лагранжа в точці $\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right)$ *є додатно визначеною квадратичною формою, бо* $d^2 u = 2 \cdot \frac{3}{2} dy \cdot dy = 3(dy)^2$.

Отже, в точці $\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right)$ *функція* $z = xy$ *досягає найбільшого значення* $\frac{25}{24}$.

Приклад.
Із усіх прямокутних трикутників із заданою площею S *знайти такий, гіпотенуза якого найкоротша.*



● *Нехай* x *і* y — *катети трикутника, а* z — *гіпотенуза. Задача зводиться до знаходження найменшого значення функції* $x^2 + y^2$ *за умовою, що* x *і* y *задовольняють рівняння* $\frac{xy}{2} = S$, *або рівняння*

$xy - 2S = 0,$ *бо* $z^2 = x^2 + y^2$.

Розглянемо функцію $u = x^2 + y^2 + \lambda(xy - 2S)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + \lambda y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + \lambda x.$$

Оскільки $x > 0$, $y > 0$, *із системи рівнянь* $\begin{cases} 2x + \lambda y = 0 \\ 2y + \lambda x = 0 \\ \frac{xy}{2} = S \end{cases}$ *дістаємо розв'язок* $x = y = \sqrt{2s}$, $\lambda = -2$.

Таким чином, гіпотенуза найкоротша, якщо катети трикутника рівні між собою.

Завдання для перевірки знань

1. *Знайти екстремум функцій.*

1) $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$;
2) $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$;
3) $z = xy(a - x - y)$;
4) $z = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$;
5) $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$;
6) $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$;
7) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$;
8) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$;
9) $z = x^2 + (y - 1)^2$;
10) $z = x^2 y^3 (6 - x - y)$;
11) $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - y^2$;
12) $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$;
13) $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$;
14) $z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$;
15) $z = e^{x^2 - y}(5 - 2x + y)$;
16) $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$;
17) $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$;
18) $z = x - 2y + \ln\sqrt{x^2 + y^2} + 3\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$;
19) $z = \sin x \sin y \sin(x + y)(0 \le x \le \pi;\ \ 0 \le y \le \pi)$;
20) $z = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\ \ (a > 0,\ b > 0)$.

2. *Знайти точки умовного екстремуму функцій.*

1) $z = xy$, *якщо* $x + y = 1$;
2) $z = \frac{x}{3} + \frac{y}{3}$, *якщо* $x^2 + y^2 = 1$;
3) $z = x^2 + y^2$, *якщо* $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$;
4) $z = \cos^2 x + \cos^2 y$, *якщо* $x - y = \frac{\pi}{4}$;

5) $z = 5x^2 + 10Bxy + 4y^2$*, якщо* $x^2 + y^2 = 3$*;*

6) $z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$*, якщо* $ax^2 + b^2y^2 = c^2$*.*

3. *Знайти найбільше і найменше значення функції* $z = x^2 - xy + \ + y^2 - 4x$ *у замкненій області, що обмежена прямими* $x = 0$*,* $y = 0$*,* $2x + 3y - 12 = 0$*.*

Відповідь. $z_{\text{найб}} = 16,\ z_{\text{найм}} = -\dfrac{16}{3}$.

4. *Знайти найбільше і найменше значення функції* $z = xy$ *у колі* $x^2 + y^2 \le 1$*.*

Відповідь. $z_{\text{найб}} = -\dfrac{1}{2}$, $z_{\text{найм}} = \dfrac{1}{2}$.

4°. *Знайти найбільше значення функції*

$$z = x^2 y(4 - x - y)$$

у трикутнику, обмеженому прямими x = 0, y = 0,

$$x + y = 6.$$

5. *Знайти найбільше і найменше значення функції* $z = \sin x + \sin y + \ + \sin(x + y)$ *в області* $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$*,* $0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$.

Відповідь. $z_{\text{найб}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, $z_{\text{найм}} = 0$.

5°. *Знайти найбільше і найменше значення функції*

$$z = e^{-x^2 - y^2}\left(2x^2 + 3y^2\right)$$

у крузі $x^2 + y^2 \le 4$*.*

6. *Знайти розміри прямокутного паралелепіпеда, що має максимальний об'єм при заданій повній поверхні* S *.*

Відповідь. $x = y = z$, $V_{\max} = \dfrac{S}{6}\sqrt{\dfrac{S}{6}}$.

7. *Методом найменших квадратів знайти емпіричну формулу для функцій, заданих такими таблицями:*

а)

x	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
y	0,7	1,7	1,6	3,2	3,6	4,6

б)

x	–0,2	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
y	3,2	2,9	1,8	1,6	1,2	0,7

Зобразити на графіку емпіричні значення і пряму.

8. *Знайти екстремум функції* $z = xy$ *за умови, що* x *і* y *задовольняють рівняння* $2x + 3y - 5 = 0$*.*

9. а. *Знайти найбільше та найменше значення функції* $z = x^2 + y^2$ *у колі* $\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y - \sqrt{2}\right)^2 \le 9$*.*

ІНДИВІДУАЛЬНІ ДОМАШНІ ЗАВДАННЯ

Задача 31. Знайти частинні похідні та диференціали першого та другого порядків, вектор градієнт заданої функції та похідну за напрямком вектору $\vec{n}$ у точці *M*.

1	$z=\sqrt{16-x^2-y^2},\ M(1,1),\ \vec{n}=(1,2)$	16	$z=\sqrt{x^2+y^2-25}, M(5,2), \vec{n}=(1,2)$
2	$z=(y-x)x^2,\ M(1,4),\ \vec{n}=(3,4)$	17	$z=(x-1)y^3,\ M(4,5),\ \vec{n}=(1,2)$
3	$z=y-\dfrac{1+x}{x},\ M(2,2),\ \vec{n}=(3,5)$	18	$z=\dfrac{2x+3y-1}{x-y}, M(3,2), \vec{n}=(4,5)$
4	$z=(x^2+y^2-4)^{-1/2}, M(6,2), \vec{n}=(3,1)$	19	$z=(6-x^2-y^2)^{-1/2}, M(1,1), \vec{n}=(4,3)$
5	$z=5x^2+3y^2-10, M(5,2), \vec{n}=(2,3)$	20	$z=y-x^2+4xy, M(5,1), \vec{n}=(3,4)$
6	$z=\sqrt{4+x^2+y^2},\ M(2,1),\ \vec{n}=(1,4)$	21	$z=\sqrt{x^2+y^2},\ M(2,2),\ \vec{n}=(4,2)$
7	$z=\ln(-x-y), M(-1,-1), \vec{n}=(-1,-2)$	22	$z=2x^2y-3y^2, M(3,4), \vec{n}=(4,2)$
8	$z=(x+1)(y^2+4), M(2,5), \vec{n}=(3,4)$	23	$z=xy+y^2,\ M(3,4),\ \vec{n}=(3,5)$
9	$z=2xy-x^2-y^2, M(3,4), \vec{n}=(3,4)$	24	$z=e^{2x+3y},\ M(1,3),\ \vec{n}=(1,2)$
10	$z=x^4+y^4-2x^2y^2, M(3,2), \vec{n}=(2,5)$	25	$z=(3x+2y)^2, M(1,2), \vec{n}=(1,5)$
11	$z=\ln\sqrt{2x^2+2y^2}, M(1,3), \vec{n}=(3,2)$	26	$z=\sqrt{\ln(x^2+y^2)}, M(3,4), \vec{n}=(1,2)$
12	$z=\ln(5x^2+3y^2), M(1,1), \vec{n}=(3,2)$	27	$z=2x^2-3y^2,\ M(2,1),\ \vec{n}=(4,5)$
13	$z=x^3+y^3-x^2y, M(3,1), \vec{n}=(1,4)$	28	$z=\ln(e^x+e^y),\ M(1,0),\ \vec{n}=(1,1)$
14	$z=\mathrm{arctg}(yx^2), M(-2,1), \vec{n}=(6,8)$	29	$z=(x^2+1)(y+1), M(3,5), \vec{n}=(5,6)$
15	$z=\arcsin\dfrac{x^2}{y}, M(1,2),\ \vec{n}=(3,4)$	30	$z=y-\dfrac{1}{x^2-9},\ M(4,4),\ \vec{n}=(5,3)$

Задача 32. Дослідити на екстремум функцію двох змінних.

1	$z=-5x^2+3xy-y^2-18x+12y-5$	16	$z=x^2+6xy-y^2+4x+32y-1$
2	$z=x^2-3xy+5y^2-5x+2y$	17	$z=2x^2+8xy+y^2+4x-20y$
3	$z=-x^2-xy-y^2+3x+6y+11$	18	$z=3x^2+xy+y^2+x-2y$
4	$z=3x^2+xy+4y^2-5x+7y+2$	19	$z=4x^2+xy-3y^2+7x+7y$
5	$z=x^2+xy+y^2-12x-3y$	20	$z=x^2-xy-7y^2-5x+17y+4$
6	$z=-x^2+xy-y^2+2x-y+3$	21	$z=-2x^2+3xy-4y^2-20x+38y$
7	$z=-x^2-y^2-4x-4y$	22	$z=3x^2+3xy+3y^2+3x+15y$
8	$z=x^2+xy+2y^2+x-3y+1$	23	$z=3x^2-3xy+4y^2-15x-12y+1$
9	$z=-2x^2-y^2-4y-4$	24	$z=-6x^2+6xy-5y^2+14y+24$
10	$z=x^2-2xy+5y^2-4x-4y$	25	$z=x^2-8xy+y^2-4x+16y-7$
11	$z=8x^2-4xy+y^2+4x-2y+1$	26	$z=-7x^2-9y^2+28x+54y$
12	$z=x^2+xy-y^2+x-7y$	27	$z=x^2+xy-7y^2-8x+25y$
13	$z=-x^2+xy+y^2-2x+6y$	28	$z=9x^2-3xy+3y^2-3x-27y+5$
14	$z=-3x^2-2y^2+12x+16y$	29	$z=x^2-2xy+4y^2-2x+2y$
15	$z=x^2+7xy+15y^2-3x-5y+4$	30	$z=2x^2-5xy+3y^2-3x+4y$

Задача 33. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні, заданої у попередній задачі, у точці $M(x_0, y_0, z_0(x_0, y_0))$.

1	$x_0 = 2, y_0 = 4$	11	$x_0 = 1, y_0 = 2$	21	$x_0 = -2, y_0 = 1$
2	$x_0 = 3, y_0 = 1$	12	$x_0 = -4, y_0 = 2$	22	$x_0 = -1, y_0 = 1$
3	$x_0 = 2, y_0 = -2$	13	$x_0 = 1, y_0 = -5$	23	$x_0 = -2, y_0 = 4$
4	$x_0 = -3, y_0 = 2$	14	$x_0 = 3, y_0 = -3$	24	$x_0 = 5, y_0 = 1$
5	$x_0 = 1, y_0 = 1$	15	$x_0 = 6, y_0 = 1$	25	$x_0 = -3, y_0 = 1$
6	$x_0 = -4, y_0 = 3$	16	$x_0 = 4, y_0 = 3$	26	$x_0 = 2, y_0 = 3$
7	$x_0 = 2, y_0 = 1$	17	$x_0 = 5, y_0 = -2$	27	$x_0 = 2, y_0 = -4$
8	$x_0 = -1, y_0 = 4$	18	$x_0 = 1, y_0 = -4$	28	$x_0 = -3, y_0 = 5$
9	$x_0 = -1, y_0 = 5$	19	$x_0 = 5, y_0 = 3$	29	$x_0 = 4, y_0 = 4$
10	$x_0 = 4, y_0 = -3$	20	$x_0 = 3, y_0 = -1$	30	$x_0 = 3, y_0 = -2$

Задача 34. Знайти умовні екстремуми функції за даної умови зв'язку.

1	$u = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z$	$z = 2x$
2	$u = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2$	$x + y + z = 13$
3	$u = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - x - 4z$	$z = y$
4	$u = x^2 + y^2 + 2z^2 + xy - 2xz + 3y - 1$	$z = x$
5	$u = x^2 + y^2 + 2z^2 + 4x + 6y - 8z + 5$	$y = -x$
6	$u = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2xz - 5y$	$z = 1 - x - y$
7	$u = 2x^2 + y^2 + 3z^2 - x + 2y + 6z + 7$	$y = 1 + x$
8	$u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$	$x = y + 3$
9	$u = -x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz + x + z - 2y + 4$	$z = 3x$
10	$u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2x - 4z$	$z = x + y$
11	$u = x^2 + 2y^2 + z^2 - 4x + 2y + 5z$	$z = 2y$
12	$u = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3x - z$	$z = 1 + x$
13	$u = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - xz + 3y - 4$	$x = y$
14	$u = x^2 + 2y^2 + z^2 + x + 5y - 3z + 2$	$z = 1 - y$
15	$u = x^2 + 4y^2 + z^2 - 3xy - 5x + y + z$	$y = z$
16	$u = -2x^2 - y^2 + z^2 - xy + 6x + 6y - z$	$z = 2 - x$
17	$u = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - xy - x + 11y$	$z = 2 - x - y$
18	$u = 2x^2 + 2y^2 - z^2 - xy - 12x - 3y$	$z = y - x$
19	$u = x^2 - y^2 - 2z^2 + yz + x - y + z$	$z = x$
20	$u = x^2 - 3y^2 + z^2 + 4x + 2z + 3$	$z = 2y$
21	$u = 8x^2 + 2y^2 + z^2 - xy - 23x - 7y$	$z = 10 + x - y$
22	$u = -3x^2 + 4y^2 + z^2 - 2xy - 2x + 2y$	$z = -2x$
23	$u = -4x^2 + y^2 - 2z^2 + 10x + 16z$	$y = x + 1$
24	$u = x^2 + 6y^2 + z^2 + 7xy - 3x + y$	$z = 1 - 3y$

25	$u=8x^2-y^2+z^2-7xy-3z-9y+2$	$x+2y-z=0$
26	$u=x^2+9y^2+z^2+11xy-2xz+yz-3x-5y$	$z=2x-3y$
27	$u=x^2+y^2+z^2+12xy+2z$	$x+y=1$
28	$u=x^2-2y^2-z^2+2x+16y+5z$	$z=2x$
29	$u=x^2+y^2+z^2+5xy+4xz+3yz-4y$	$x+y+z=0$
30	$u=x^2+y^2-z^2+xy+xz+yz-x-2y-3z$	$z=x+y$

Задача 35. Методом Лагранжа знайти умовні екстремуми функції $z=f(x,y)$ за даної умови зв'язку.

1	$z=xy,\quad x^2+y^2=2$	16	$z=xy,\quad x^2+y^2=18$
2	$z=x+y,\quad x^2+y^2-18=0$	17	$z=x+y,\quad x^2+y^2-8=0$
3	$z=2x+4y,\quad x^2+y^2=5$	18	$z=2x+4y,\quad x^2+y^2=20$
4	$z=2xy,\quad x^2+y^2-18=0$	19	$z=2xy,\quad x^2+y^2-2=0$
5	$z=x-y,\quad x^2+y^2=8$	20	$z=x-y,\quad x^2+y^2=18$
6	$z=4x+2y,\quad x^2+y^2-20=0$	21	$z=4x+2y,\quad x^2+y^2-5=0$
7	$z=2xy,\quad x^2+y^2-8=0$	22	$z=xy,\quad x^2+y^2-8=0$
8	$z=x-3y,\quad x^2+y^2=10$	23	$z=x+3y,\quad x^2+y^2=10$
9	$z=2x-4y,\quad x^2+y^2=20$	24	$z=2x-4y,\quad x^2+y^2=5$
10	$z=4x-2y,\quad x^2+y^2-5=0$	25	$z=4x-2y,\quad x^2+y^2-20=0$
11	$z=x+y,\quad x^2+y^2-2=0$	26	$z=x-y,\quad x^2+y^2-2=0$
12	$z=3x-y,\quad x^2+y^2=10$	27	$z=3x+y,\quad x^2+y^2=10$
13	$z=xy+4,\quad x^2+y^2=2$	28	$z=xy-3,\quad x^2+y^2=2$
14	$z=2xy-5,\quad x^2+y^2-2=0$	29	$z=2xy+7,\quad x^2+y^2-2=0$
15	$z=x+3y,\quad x^2+y^2=40$	30	$z=3x+y,\quad x^2+y^2=40$

Задача 36. Знайти найбільше та найменше значення функції в області, обмеженій заданими лініями.

1	$z=x^2+2xy-4x-y$, $\quad x=0,\ y=0,\ x=1,\ y=2$
2	$z=x^2+2y^2-4x-y$, $\quad x=0,\ y=0,\ x+y-4=0$
3	$z=xy(4-x+y)$, $\quad x=0,\ y=0,\ x-y-7=0$
4	$z=x^2-y^2+2xy+2x$, $\quad x=0,\ y=0,\ x+y+2=0$
5	$z=2x^2-y^2-2x-2y$, $\quad x=0,\ y=0,\ x-y-3=0$
6	$z=xy(2-x-y)$, $\quad x=0,\ y=0,\ x+y-5=0$
7	$z=x^2+2y^2-x-3y$, $\quad x=0,\ y=0,\ x+y-3=0$
8	$z=xy(y-x-1)$, $\quad x=0,\ y=0,\ x+y+4=0$
9	$z=xy(-4-x-y)$, $\quad x=0,\ y=0,\ x+y+7=0$
10	$z=3-x^2-y^2+x+y$, $\quad x=0,\ y=0,\ x+y-1=0$
11	$z=xy(3-x+y)$, $\quad x=0,\ y=0,\ x-y-5=0$
12	$z=x^2+y^2-4x-4y$, $\quad x=0,\ y=0,\ x=3,\ y=3$
13	$z=xy(1-x-y)$, $\quad x=0,\ y=0,\ x+y-4=0$

14	$z=3x^2+y^2+6x-3y$, $x=0$, $y=0$, $x-y+3=0$
15	$z=xy(4+x-y)$, $x=0$, $y=0$, $x-y+7=0$
16	$z=xy(-3-x-y)$, $x=0$, $y=0$, $x+y+5=0$
17	$z=xy(1-x+y)$, $x=0$, $y=0$, $x-y-4=0$
18	$z=2x^2+2y^2+3x+4y$, $x=0$, $y=0$, $x+y+3=0$
19	$z=xy(3-x-y)$, $x=0$, $y=0$, $x+y-7=0$
20	$z=3x^2+4y^2+6x-8y$, $x=0$, $y=0$, $x-y+4=0$
21	$z=x^2+y^2-x+2y$, $x=0$, $y=0$, $x-y-4=0$
22	$z=x^2+3y^2+x-y$, $x=0$, $y=0$, $x-y+1=0$
23	$z=3-2x-y^2-xy$, $x=0$, $y=0$, $x-y-1=0$
24	$z=x^3+y^3-9xy-25$, $x=0$, $y=0$, $x=5$, $y=5$
25	$z=3x^2+4y^2+6x+8y$, $x=0$, $y=0$, $x+y+4=0$
26	$z=x^2+y^2-6x-4y+2$ $x=1$, $y=-3$, $x=4$, $y=2$
27	$z=x^2+xy-2x$, $x=-1$, $y=0$, $x=1$, $y=3$
28	$z=xy(1+x-y)$, $x=0$, $y=0$, $x-y+4=0$
29	$z=2-x^2-y^2+x+y$, $x=0$, $y=0$, $x=2$, $y=2$
30	$z=xy(3+x-y)$, $x=0$, $y=0$, $x-y+5=0$

Задача 37. Експериментально отримані сім значень шуканої функції при семи значеннях аргументу. Методом найменших квадратів визначити функцію $y=f(x)$ у вигляді $y=ax^2+bx+c$.

1	x	–3	–2	–1	0	1	2	3	16	x	–3	–2	–1	0	1	2	3
	y	1	0	4	6	9	10	12		y	–2	–6	–4	–1	3	7	10
2	x	–3	–2	–1	0	1	2	3	17	x	–3	–2	–1	0	1	2	3
	y	2	5	1	1	3	6	9		y	0	2	3	5	7	9	13
3	x	–3	–2	–1	0	1	2	3	18	x	–3	–2	–1	0	1	2	3
	y	6	2	1	0	3	6	9		y	2	5	9	8	4	2	1
4	x	–3	–2	–1	0	1	2	3	19	x	–3	–2	–1	0	1	2	3
	y	16	12	10	2	0	5	7		y	14	11	8	6	5	2	0
5	x	–3	–2	–1	0	1	2	3	20	x	–3	–2	–1	0	1	2	3
	y	2	1	3	7	10	12	14		y	12	10	2	4	7	11	15
6	x	–3	–2	–1	0	1	2	3	21	x	–3	–2	–1	0	1	2	3
	y	–2	1	3	7	10	2	0		y	15	12	8	5	0	2	6
7	x	–3	–2	–1	0	1	2	3	22	x	–3	–2	–1	0	1	2	3
	y	–9	–8	–3	–1	–5	–7	–9		y	1	2	4	8	9	5	2
8	x	–3	–2	–1	0	1	2	3	23	x	–3	–2	–1	0	1	2	3
	y	10	7	3	–1	–4	–6	–2		y	6	2	0	5	8	12	15
9	x	–3	–2	–1	0	1	2	3	24	x	–3	–2	–1	0	1	2	3
	y	12	10	9	6	4	0	1		y	2	–1	–3	–7	–9	–2	0

10	x	–3	–2	–1	0	1	2	3	25	x	–3	–2	–1	0	1	2	3
	y	9	6	3	1	1	5	2		y	–2	0	–2	–5	–6	–8	–9
11	x	–3	–2	–1	0	1	2	3	26	x	–3	–2	–1	0	1	2	3
	y	9	6	3	0	1	2	6		y	–9	–7	–3	1	4	6	2
12	x	–3	–2	–1	0	1	2	3	27	x	–3	–2	–1	0	1	2	3
	y	–9	–7	–5	–1	–3	–8	–9		y	–6	–2	–1	0	–3	–7	–9
13	x	–3	–2	–1	0	1	2	3	28	x	–3	–2	–1	0	1	2	3
	y	7	5	0	2	10	12	16		y	–2	–5	–1	–1	–3	–6	–9
14	x	–3	–2	–1	0	1	2	3	29	x	–3	–2	–1	0	1	2	3
	y	14	12	10	7	3	1	2		y	–7	–3	0	–2	–5	–6	–8
15	x	–3	–2	–1	0	1	2	3	30	x	–3	–2	–1	0	1	2	3
	y	0	2	10	7	3	1	–2		y	9	7	5	3	0	4	7

ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ.

Задача 31. Знайти частинні похідні та диференціали першого та другого порядків, вектор градієнт заданої функції $z=(-y^2+2x+1)x^3$ та похідну за напрямком вектора $\vec{n}=(2;4)$ у точці $M(-1;3)$.

Розв'язання

Знайдемо частинні похідні першого порядку заданої функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x^3+3x^2\left(-y^2+2x+1\right)=8x^3-3x^2y^2+3x^2,\ \frac{\partial z}{\partial y}=-2yx^3,$$

та їх значення у точці $M(-1;3)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M=-32,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M=-6.$$

Знайдемо вектор градієнт у загальному вигляді:

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,z=\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}=\left(8x^3-3x^2y^2+3x^2\right)\vec{i}-2yx^3\vec{j}$$

та його значення у точці $M(-1;3)$:

$$\left.\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,z\right|_M=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M\vec{i}+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M\vec{j}=-32\vec{i}-6\vec{j}.$$

Похідну функції $z=f(x,y)$ за напрямком вектора $\vec{n}$ обчислимо за формулою

$$\frac{\partial z}{\partial n}=\left.\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,z\right|_M\cdot\vec{n}_0.$$

Беручи до уваги, що $|\vec{n}|=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$, обчислимо координати орта вектора $\vec{n}_0=\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Отже,

$$\frac{\partial z}{\partial n}=-32\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}-12\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{-44}{\sqrt{5}}.$$

Знайдемо частинні похідні другого порядку заданої функції:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 24x^2 - 6xy^2 + 6x\,,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2x^3\,,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -6yx^2\,.$$

Запишемо диференціали першого та другого порядків:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (8x^3 - 3x^2y^2 + 3x^2)dx - 2yx^3dy\,,$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 =$$

$$= (24x^2 - 6xy^2 + 6x)dx^2 - 12yx^2dxdy - 2x^3dy^2\,.$$

Обчислимо їх значення у точці $M(-1;3)$:

$$dz\big|_M = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M dx + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M dy = -32dx - 6dy\,,$$

$$d^2z\big|_M = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_M dx^2 + 2\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_M dxdy + \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_M dy^2 = 72dx^2 - 36dxdy + 2dy^2\,.$$

Задача 32. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z = -11x^2 - y^2 + 2xy + 20x$.

Розв’язання

Знайдемо частинні похідні першого та другого порядків даної функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -22x + 2y + 20\,,\ \frac{\partial z}{\partial y} = -2y + 2x\,,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -22\,,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2\,,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2\,.$$

Координати стаціонарної точки є розв’язком системи рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -22x + 2y + 20 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y + 2x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -11x + y + 10 = 0, \\ x = y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Отже, маємо одну стаціонарну точку $M(1;1)$.

Перевіримо виконання достатніх умов екстремуму у цій точці. Для цього потрібно дослідити на знаковизначеність квадратичну форму з матрицею

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Квадратична форма є від’ємно визначеною, бо $\Delta_1 = -22 < 0$, $\Delta_2 = -22 \cdot (-2) - 4 = 40 > 0$. Отже, у точці $M(1;1)$ функція досягає максимуму.

Задача 33. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні, заданої у попередній задачі, у точці $M(x_0, y_0, z_0(x_0, y_0))$, де $x_0 = -2$, $y_0 = -3$..

Розв’язання

Знайдемо значення частинних похідних першого порядку даної функції у точці $(x_0; y_0) = (-2;-3)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(-2;-3)} = -22x + 2y + 20\big|_{(-2;-3)} = 55\,,\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(-2;-3)} = -2y + 2x\big|_{(-2;-3)} = 2\,.$$

Обчислимо значення

$$z_0 = z(-2;-3) = -11 \cdot (-2)^2 - (-3)^2 + 2(-2)(-3) + 20(-2) = -81\,.$$

Рівняння дотичної площини до поверхні:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0;y_0)}\cdot(x-x_0)+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0;y_0)}\cdot(y-y_0)-(z-z_0)=0 .$$

Підставляючи числові значення частинних похідних та координати точки, дістанемо:

$$55(x+2)+2(y+3)-(z+81)=0 \text{ або } 55x+2y-z+35=0 .$$

Рівняння нормалі до поверхні:

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0;y_0)}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0;y_0)}}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Підставляючи числові значення частинних похідних та координати точки, дістанемо:

$$\frac{x+2}{55}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+81}{-1}.$$

Задача 34. За даної умови зв'язку $z=y$ знайти умовні екстремуми функції $u=x^2-2y^2+3z^2-3xy+4yz-5x+y+z$.

Розв'язання

Якщо $z=y$, то функція має вигляд

$$u=x^2+5y^2-3xy-5x+2y .$$

Знайдемо частинні похідні першого та другого порядків даної функції:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x-3y-5,\ \frac{\partial u}{\partial y}=10y-3x+2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=10,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=-2.$$

Визначимо координати стаціонарної точки, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=2x-3y-5=0,\\ \frac{\partial z}{\partial y}=10y-3x+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{3}{2}y+\frac{5}{2},\\ 10y-\frac{9}{2}y-\frac{15}{2}+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4,\\ y=1.\end{cases}$$

Отже, маємо одну стаціонарну точку $M(4;1)$.

Дослідимо одержану функцію двох змінних на екстремум. Перевіримо виконання достатніх умов екстремуму у цій точці. Дослідимо на знаковизначеність квадратичну форму з матрицею

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 10\end{pmatrix}.$$

Квадратична форма є додатно визначеною, бо $\Delta_1=2>0$, $\Delta_2=11>0$. Отже, у точці $M(4;1)$ функція двох змінних досягає максимуму. Відповідно функція трьох змінних $u=x^2-2y^2+3z^2-3xy+4yz-5x+y+z$ має умовний максимум за умови $z=y$ у точці $P(4;1;1)$.

Задача 35. Методом Лагранжа знайти умовні екстремуми функції $z = 2x + 8y$ за даної умови зв'язку $x^2 + y^2 = 17$.

Розв'язання

Складемо функцію Лагранжа $L = 2x + 8y + \lambda(x^2 + y^2 - 17)$. Знайдемо її частинні похідні:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2 + 2\lambda x; \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 8 + 2\lambda y; \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 17.$$

Прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} 2 + 2\lambda x = 0; \\ 8 + 2\lambda y = 0; \\ x^2 + y^2 = 17; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/\lambda; \\ y = -4/\lambda; \\ 1/\lambda^2 + 16/\lambda^2 = 17; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/\lambda; \\ y = 4/\lambda; \\ \lambda^2 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1; \\ x = -1; \\ y = -4; \end{cases} \text{або} \begin{cases} \lambda = 11; \\ x = 1; \\ y = 4; \end{cases}$$

Дістанемо дві стаціонарні точки $M(-1;-4)$, $P(1;4)$. Дослідимо функцію на екстремум. Знайдемо похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0.$$

Дослідимо на знаковизначеність квадратичну форму з матрицею

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Для стаціонарної точки $M(-1;-4)$ при $\lambda = 1$ маємо матрицю $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Квадратична форма є додатно визначеною, бо $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 4 > 0$. Отже, у точці $M(-1;-4)$ функція досягає умовного мінімуму.

Для стаціонарної точки $P(1;4)$ при $\lambda = -1$ маємо матрицю $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Квадратична форма є відємно визначеною, бо $\Delta_1 = -2 < 0$, $\Delta_2 = 4 > 0$. Отже, у точці $P(1;4)$ функція досягає умовного максимуму.

Задача 36. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + 2xy - 8x - 2y$ в області, обмеженій заданими лініями $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 5$.

Розв'язання

Зобразимо заданий трикутник на малюнку. Позначимо його вершини O(0,0), A(5,0), B(0,5).

Знайдемо частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y - 8; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 2.$$

Прирівняємо їх до нуля

$$\begin{cases} 2x+2y-8=0, \\ 2x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4, \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3, \\ x=1. \end{cases}$$

Дістанемо стаціонарну точку *M*(1,3), що лежить у заданому трикутнику.

Дослідимо функцію на безумовний екстремум всередині області. Знайдемо похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2 .$$

Дослідимо на знаковизначеність квадратичну форму з матрицею

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Квадратична форма є напів додатно визначеною, бо $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 0$. Отже, не можна зробити висновок про існування екстремуму у точці $M(4;1)$.

Дослідимо функцію на умовний екстремум на кожні границі області. Розглянемо сторону *OA* нашого трикутника. Враховуючи, що для точок цієї сторони виконується умова $y=0$, знайдемо $z(x,0) = x^2 - 8x$. Обчислимо похідну $z' = 2x - 8$ та, прирівнюючи її до нуля, знайдемо стаціонарну точку $x = 4$. Точка *N*(4,0) лежить на стороні *OA* заданого трикутника.

Розглянемо сторону *OB* нашого трикутника. Враховуючи, що для точок цієї сторони виконується умова $x = 0$, знайдемо $z(0, y) = -2y$. Обчислимо похідну $z' = -2$. Оскільки похідна не дорівнює нулю, функція не має стаціонарних точок.

Розглянемо сторону *AB* нашого трикутника, в усіх точках якої $y = 5 - x$. Знайдемо

$$z(x, 5-x) = x^2 + 2x(5-x) - 8x - 2(5-x) = -x^2 + 4x - 10 .$$

Обчислимо похідну $z' = -2x + 4$ та, прирівнюючи її до нуля, зайдемо стаціонарну точку $x = 2$. Точка *P*(2,3) лежить на стороні *AB* заданого трикутника.

Знайдемо значення функції у точках *M*(1,3), *N*(4,0), *P*(2,3), *O*(0,0), *A*(5,0), *B*(0,5):

$$z_M = -7, \; z_N = -16, \; z_P = -6, \; z_O = 0, \; z_A = -15, \; z_B = -10 .$$

Функція досягає свого найбільшого та найменшого значень в одній з цих точок.

Найбільшого значення $z = 0$ функція досягає у точці *O*(0,0), найменшого значення $z = -16$ функція досягає у точці *N*(4,0).

Задача 37. Експериментально отримані п’ять значень шуканої функції при п’яти значеннях аргументу. Методом найменших квадратів визначити функцію $y = f(x)$ у вигляді $y = ax^2 + bx + c$.

x	–2	–1	0	1	2
y	2	1	1	2	40

Розв’язання.

Відповідно методу найменших квадратів параметри a, b, c потрібно обирати з умови мінімуму функції

$$S(a,b,c) = \sum_{i=1}^{5} \left(a x_i^2 + b x_i + c - y_i \right)^2, \text{ де } y_i = f(x_i).$$

Отже, їх можна знайти з системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{5} \left(a x_i^2 + b x_i + c - y_i \right) x_i^2 = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{5} \left(a x_i^2 + b x_i + c - y_i \right) x_i = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial c} = 2\sum_{i=1}^{5} \left(a x_i^2 + b x_i + c - y_i \right) = 0. \end{cases}$$

Позначимо $S_k = \sum_{i=1}^{5} x_i^k,\ k = \overline{0,4}$ та $t_k = \sum_{i=1}^{5} x_i^k y_i,\ k = \overline{0,2}$. Систему перепишемо у вигляді

$$\begin{cases} S_0 c + S_1 b + S_2 a = t_0, \\ S_1 c + S_2 b + S_3 a = t_1, \\ S_2 c + S_3 b + S_4 a = t_2. \end{cases}$$

Для визначення коефіцієнтів системи складемо таблицю.

x_i	x_i^0	x_i^2	x_i^3	x_i^4	y_i	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
–2	1	4	–8	16	2	–4	8
–1	1	1	–1	1	1	–1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	2	2	2
2	1	4	8	16	4	8	16
$S_1 = 0$	$S_0 = 5$	$S_2 = 10$	$S_3 = 0$	$S_4 = 34$	$t_0 = 10$	$t_1 = 5$	$t_2 = 27$

Таким чином, система набуває вигляду

$$\begin{cases} 5c + 10a = 10, \\ 10b = 5, \\ 10c + 34a = 27. \end{cases}$$

Її розв’язок $a = b = 1/2,\ c = 1$. Отже, шукана функція $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$.