Міністерство освіти і науки України

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З ДИСЦИПЛІНИ «ТЕОРІЯ ІГОР», РОЗДІЛ «ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ»

для здобувачів вищої освіти за спеціальностями 122 – Комп’ютерні науки, 121 – Інженерія програмного забезпечення

Одеса: Одеська політехніка, 2023

Міністерство освіти і науки України

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З ДИСЦИПЛІНИ «ТЕОРІЯ ІГОР», РОЗДІЛ «ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ»

для здобувачів вищої освіти за спеціальностями 122 – Комп'ютерні науки, 121 – Інженерія програмного забезпечення

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики
та моделювання систем
Протокол №10 від 24.05.2023

Одеса: Одеська політехніка, 2023

Конспект лекцій з дисципліни «Теорія ігор», розділ «Елементи лінійного програмування» для здобувачів вищої освіти за спеціальностями 122 – Комп'ютерні науки, 121 – Інженерія програмного забезпечення / Уклад.: В. В. Грібова, В. В. Перстньова, Ю. Є. Сікіраш. Одеса : Одеська політехніка, 2023. – 49 с.

Укладачі: **Грібова В.В.**, канд. фіз. - мат. наук, доцент
Перстньова В.В., ст. викладач
Сікіраш Ю.Є., ст. викладач

ВСТУП

Лінійне програмування має надзвичайно широку сферу практичного використання у теорії прийняття рішень, дослідженні операцій і оптимальному плануванні. У навчальних програмах підготовки сучасних фахівців з комп'ютерних технологій лінійне програмування розглядається у різних контекстах у таких дисциплінах, як «Дискретна математика», «Теорія прийняття рішень», «Системний аналіз», «Математичне програмування», «Методи оптимізації», «Дослідження операцій», «Теорія ігор».

У конспекті лекцій представлені теоретичні відомості з лінійного програмування, приклади, завдання для самостійного розв'язування, рекомендована література. Розглянуті такі питання лінійного програмування, як побудова лінійних моделей, геометрична інтерпретація і графічний спосіб розв'язування задач лінійного програмування, застосування симплекс-методу та методу штучного базису.

Конспект лекцій рекомендовано студентам ВНЗ спеціальності 122-Комп'ютерні науки та 121-Інженерія програмного забезпечення, а також будуть корисні економістам і керуючим робітникам.

РОЗДІЛ 1. ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Математичне програмування становить математичну дисципліну, що займається вивченням екстремальних задач і розробкою методів їх розв'язання.

У загальному вигляді математична постановка екстремальної задачі полягає у визначенні найбільшого або найменшого значення цільової функції $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за умов $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \le b_i \ \ (i = \overline{1, m})$, де F $і$ g_i —задані функції, b_i —задані дійсні числа. Якщо функції F $і$ g_i — лінійні, то відповідна задача є задачею лінійного програмування. Якщо ж хоча б одна з вказаних функцій нелінійна, то відповідна задача є задачею нелінійного програмування.

1.1 Приклади задач лінійного програмування

Задача 1. Для виготовлення трьох видів виробів A, B і C використовується токарне, фрезерувальне, зварювальне і шліфувальне обладнання. Витрати часу на обробку одного виробу для кожного з вказаних типів обладнання надані в таблиці 1.1. У цій таблиці також вказано загальний фонд робочого часу кожного з типів обладнання та прибуток від реалізації виробу кожного виду.

Таблиця 1.1

Тип обладнання	Затрати часу на обробку одного виробу (верстат·год)			Загальний фонд робочого часу обладнання (год)
	A	*B*	*C*	
фрезерувальне	2	4	5	120
токарне	1	8	6	280
зварювальне	7	4	5	240
шліфувальне	4	6	7	360
Прибуток (грн)	100	140	120	

Потрібно визначити скільки виробів і якого типу потрібно виготовити підприємству, щоб прибуток від їхньої реалізації був максимальним. Скласти математичну модель задачі.

Розв'язання. Нехай буде виготовлено x_1 одиниць виробів виду *A*, x_2 одиниць - виду *B*, x_3 одиниць - виду *C*. Тоді для виготовлення такої кількості виробів потрібно витратити $2x_1 + 4x_2 + 5x_3$ верстато-годин фрезерувального обладнання. Так як загальний фонд робочого часу верстатів даного типу не може перевищувати 120 годин, то повинна виконуватись нерівність

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 120.$$

Аналогічні міркування відносно токарного, зварювального і шліфувального обладнання приведуть до наступних нерівностей:

$$x_1 + 8x_2 + 6x_3 \leq 280$$

$$7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 240$$

$$4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 360$$

При цьому $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$. Прибуток від реалізації становитиме

$$F = 100x_1 + 140x_2 + 120x_3.$$

Таким чином, отримаємо наступну математичну задачу: дана система

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 120, \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 \leq 280, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 240, \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 360. \end{cases} \qquad (1.1.1)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \qquad (1.1.2)$$

і лінійна функція з трьома невідомими

$$F = 100x_1 + 140x_2 + 120x_3. \qquad (1.1.3)$$

Потрібно з усіх невід'ємних розв'язків системи нерівностей (1.1.1) знайти такий, при якому функція (1.1.3) набуває максимального значення.

Лінійна функція (1.1.3) разом із системою нерівностей (1.1.1) і умовами (1.1.2) утворюють математичну модель задачі.

Задача (1.1.1)-(1.1.3) є задачею лінійного програмування.

Задача 2. На швейній фабриці тканина може бути розкроєна декількома способами для виготовлення необхідних деталей швейних виробів. Нехай при j -му варіанті крою ($j=\overline{1,n}$) 100м^2 тканини виготовляють b_{ij} виробів i-го виду ($i=\overline{1,m}$), а величина відходів при даному варіанті крою дорівнює c_j м^2. Знаючи, що деталей i -го виду слід виготовити B_i штук, потрібно розкроїти тканину так, щоб було отримано необхідна кількість деталей кожного виду при мінімальних загальних відходах. Скласти математичну модель задачі.

Розв'язання. Нехай за j-м варіантом розкроюють x_j сотень метрів квадратних тканини. Так як, при розкрою 100м^2 тканини за j-м варіантом отримаємо b_{ij} деталей i-го виду, то за всіма варіантами розкрою буде отримано $b_{i1}x_1+b_{i2}x_2+\cdots+b_{in}x_n$ деталей i-го виду.

Так як деталей i-го виду повинно бути виготовлено B_i штук, то

$$b_{i1}x_1+b_{i2}x_2+\cdots+b_{in}x_n=B_i,\quad (i=\overline{1,m})$$

Загальна величина відходів за всіма варіантами розкрою становитиме

$$F=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

Приходимо до наступної математичної задачі лінійного програмування:
знайти мінімум функції

$$F=\sum_{j=1}^{n}c_j\,x_j \tag{1.1.4}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\,x_j=B_i\quad (i=\overline{1,m}) \tag{1.1.5}$$

$$x_j\geq 0\qquad\qquad (j=\overline{1,n}) \tag{1.1.6}$$

1.2 Загальна, стандартна і канонічна задачі лінійного програмування

Означення. ***Загальною задачею лінійного програмування*** називається задача, яка полягає у визначенні максимального (мінімального) значення функції

$$F=\sum_{j=1}^{n}c_j\,x_j \tag{1.2.1}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,x_j\leq b_i\quad (i=\overline{1,k}) \tag{1.2.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,x_j=b_i\quad (i=\overline{k+1,m}) \tag{1.2.3}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, l}, l \leq n) \tag{1.2.4}$$

де a_{ij}, b_i, c_j −задані сталі величини і $k \leq m$.

Означення. Функція (1.2.1) називається ***цільовою функцією*** (або лінійною формою) задачі (1.2.1) - (1.2.4), а умови (1.2.2)-(1.2.4) – обмеженнями даної задачі.

Означення: ***Стандартна (або симетрична) задача*** лінійного програмування - це задача, яка полягає у визначенні максимального (мінімального) значення функції (1.2.4) при виконанні умов (1.2.2) і (1.2.4), де $k = m$, $l = n$.

Означення: ***Канонічна (або основна) задача*** лінійного програмування - це задача, яка полягає у визначенні максимального значення функції (1.2.1) при виконанні умов (1.2.3) і (1.2.4), де $k = m, l = n$.

Означення. Сукупність чисел $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, які задовольняють обмеженням задачі (1.2.2)−(1.2.4), називається ***допустимим розв'язком*** (або планом).

Означення. План $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, при якому цільова функція (1.2.1) набуває свого максимального (мінімального) значення, називається ***оптимальним***.

Значення цільової функції (1.2.1) при плані X будемо позначати $F(X)$.

Отже, $F(X) \leq F(X^*)$ або $F(X) \geq F(X^*)$.

Ці три форми (може бути ще змішана) задачі лінійного програмування рівнозначні. Кожну з них простими перетвореннями можна звести до іншої.

У тому випадку, коли потрібно знайти мінімум функції

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

можна перейти до пошуку максимуму функції

$$F_1 = -F = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n.$$

Задача 3. Записати у формі основної задачі лінійного програмування наступну задачу:

знайти максимум функції $F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \leq 2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 3 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \leq 6 \\ x_1 + \qquad x_4 - 5x_5 \geq 8 \end{cases} \tag{1.2.5}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Введемо нові невід'ємні змінні x_6, x_7, x_8, x_9 так, щоб систему нерівностей замінити рівностями

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 3 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 = 6 \\ x_1 + \qquad x_4 - 5x_5 - x_9 = 8 \end{cases} \tag{1.2.6}$$

$$x_6 \geq 0, x_7 \geq 0, x_8 \geq 0, x_9 \geq 0$$

$$F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$$

Задану стандартну задачу (1.2.5) записали у вигляді основної задачі лінійного програмування (1.2.6).

Задача 4. Записати у формі стандартної задачі лінійного програмування наступну задачу:

знайти максимум функції $F = 6{,}5x_1 - 7{,}5x_3 + 23{,}5x_4 - 5x_5$ за умов

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 12 \\ 2x_1 \qquad - x_3 + 12x_4 - x_5 = 14 \\ x_1 + 2x_2 + \qquad 3x_4 - x_5 = 6 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Розв'язання. Визначимо ранг системи, виразимо базисні змінні через небазисні

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 & -1 & 12 \\ 2 & 0 & -1 & 12 & -1 & 14 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 & -1 & 12 \\ 0 & -6 & -3 & 4 & 1 & -10 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 & -1 & 12 \\ 0 & -6 & -3 & 4 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 1 & 26 \end{array}\right)$$

Rang A=Rang $A|B$=3, змінні x_1, x_2, x_3 —базисні, x_4, x_5 —небазисні. Виразимо базисні змінні через небазисні

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{26 - 10x_4 - x_5}{3} \\ x_2 = \dfrac{-8 + 7x_4 + x_5}{3} \\ x_1 = \dfrac{34 - 11x_4 - 2x_5}{3} \end{cases}$$

Виключимо базисні змінні в цільовій функції

$$F(x_4, x_5) = 6{,}5 \cdot \frac{1}{3}(34 - 11x_4 - 2x_5) - 7{,}5 \cdot \frac{1}{3}(26 - 10x_4 - x_5) + 23{,}5x_4 - 5x_5 =$$
$$= \frac{1}{6}(52 + 7x_4 - 11x_5)$$

$$F(x_4, x_5) = \frac{1}{6}(52 + 7x_4 - 11x_5)$$

Запишемо обмеження на змінні:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 12 \\ 6x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 = 10 \\ 8x_3 + 10x_4 + x_5 = 26 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

У першому рівнянні виключимо x_1, у другому $- x_2$, у третьому $- x_3$:

$$\begin{cases} 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 \leq 12 \\ 3x_3 - 4x_4 - x_5 \leq 10 \\ 10x_4 + x_5 \leq 26 \end{cases}$$

У перших двох нерівностях виключаємо базисні змінні x_2, x_3:

$$\begin{cases} 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)(8 - 7x_4 - x_5) + \left(\frac{1}{3}\right)(26 - 10x_4 - x_5) + 4x_4 - x_5 \leq 12 \\ 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)(26 - 10x_4 - x_5) - 4x_4 - x_5 \leq 10 \\ 10x_4 + x_5 \leq 26 \end{cases}$$

Після зведення подібних отримаємо задачу в стандартній формі:

$$\begin{cases} x_4 - x_5 \leq 34 \\ 14x_4 + 2x_5 \geq 16 \\ 10x_4 + x_5 \leq 26 \end{cases}$$

знайти максимум функції $F(x_4, x_5) = \frac{52}{6} + \frac{7}{6}x_4 - \frac{11}{6}x_5$ при обмеженнях на змінні:

$$\begin{cases} x_4 - x_5 \leq 34 \\ 14x_4 + 2x_5 \geq 16 \\ 10x_4 + x_5 \leq 26 \end{cases}$$

$$x_4, x_5 \geq 0$$

1.3 Властивості основної задачі лінійного програмування. Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування

Розглянемо основну задачу лінійного програмування:

знайти максимум функції

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1.3.1)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i \ (i = \overline{1,m}), \ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n}\ ) \qquad (1.3.2)$$

Перепишемо задачу у векторній формі

$$F = CX \qquad (1.3.3)$$

за умов

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \cdots + x_nP_n = P_0 \qquad (1.3.4)$$

де $C = (c_1, c_2, \dots, c_n), X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,
$CX -$ скалярний добуток.

$$P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{m_1} \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \ P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Означення. План $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається ***опорним планом*** основної задачі лінійного програмування, якщо система векторів P_j, що входять в (1.3.4) з додатними коефіцієнтами x_j, лінійно незалежна. Так як вектори P_j $m -$вимірні, то число їх додатних компонентів не може бути більше, ніж m.

Означення. Опорний план називається ***невиродженим***, якщо він містить рівно m додатних компонентів. У протилежному випадку він називається ***виродженим***.

Властивості основної задачі лінійного програмування пов'язані з властивостями опуклих множин.

Означення. Нехай $X_1, X_2, \dots, X_n$ довільні точки Евклідового простору E_n. ***Опуклою лінійною комбінацією*** цих точок називається сума

$$\alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 + \cdots + \alpha_nX_n,$$

де $\alpha_i -$довільні невід'ємні числа і

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \ (i = \overline{1,n}).$$

Означення. Множина називається опуклою, якщо разом з будь-якими двома її точками містить і їх довільну лінійну комбінацію.

Означення. Точка X опуклої множини називається ***кутовою***, якщо вона не може бути подана у вигляді опуклої лінійної комбінації яких-небудь двох інших різних точок даної множини.

Теорема. Множина планів основної задачі лінійного програмування є ***опуклою*** (якщо тільки вона не є порожня).

Означення: Непорожня множина планів основної задачі лінійного програмування називається ***многогранником розв'язків***, а кожна кутова точка многогранника розв’язків називається ***вершиною***.

Теорема. Якщо основна задача лінійного програмування має оптимальний план, то цільова функція набуває максимального значення в одній з вершин многогранника розв’язків. Якщо цільова функція набуває максимального значення більш ніж в одній вершині, то вона набуває його в будь-якій точці, яка є опуклою лінійною комбінацією цих вершин.

Теорема. Якщо система векторів $P_1, P_2, \dots, P_k$ $(k \leq n)$ в розкладанні (1.3.4) лінійно незалежна й така, що

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \cdots + x_k P_k = P_0 \tag{1.3.5}$$

де всі $x_i \geq 0$ $(i = \overline{1, k})$, то точка $X = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ є вершиною многогранника розв'язків.

Теорема. Якщо $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вершина многогранника розв'язків, то вектори P_j, що відповідають додатним x_j в розкладанні (1.3.4), лінійно незалежні.

Сформульовані теореми дозволяють зробити наступні висновки:

Непорожня множина планів основної задачі лінійного програмування утворює опуклий многогранник. Кожна вершина цього многогранника визначає опорний план. В одній з вершин многогранника значення цільової функції дорівнює максимуму (якщо функція обмежена зверху). Якщо функція набуває максимального значення більш ніж в одній вершині, то вона набуває такого ж самого значення в будь-якій точці, яка є опуклою лінійною комбінацією цих вершин.

Вершину многогранника розв'язків, в якій цільова функція набуває максимального значення, знайти просто, якщо задача, записана у формі стандартної, містить не більше двох змінних, або задача, записана у формі основної, містить не більше двох небазисних змінних, тобто $n - r \leq 2$, де $n -$число змінних, $r -$ранг матриці коефіцієнтів у системі обмежень.

Розглянемо розв'язання даної задачі на прикладах.

Приклад 1. Знайти максимум і мінімум функції $F = x_1 + x_2$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 \geq 9 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Розв'язання. Побудуємо многогранник розв'язків. Для цього в системі обмежень замінимо нерівності рівностями:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16 & (I) \\ -4x_1 + 2x_2 = 8 & (II) \\ x_1 + 3x_2 = 9 & (III) \\ x_1 = 0 & (IV) \\ x_2 = 0 & (V) \end{cases}$$

Кожне рівняння визначає пряму в системі координат $x_1 0 x_2$. Побудуємо їх.

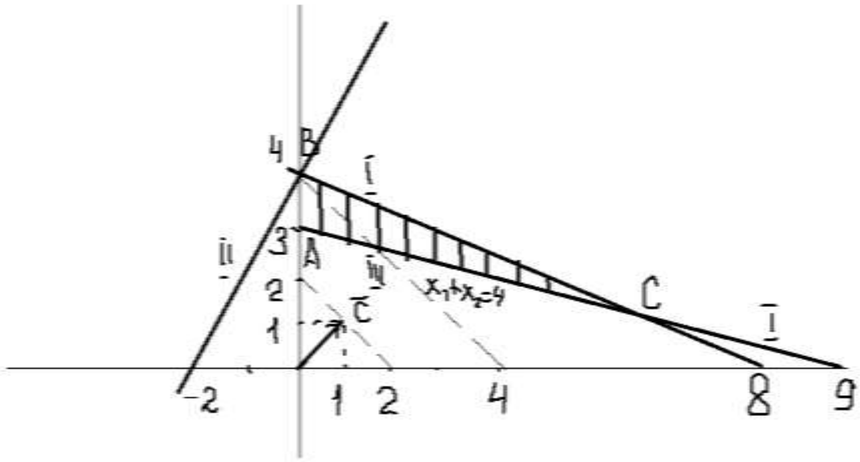

Рис.1

Многокутником розв'язків є трикутник *ABC*, де *A*(0,3), *B*(0,4), *C*(6,1). Координати точок ΔABC задовольняють умові невід'ємності та нерівностям системи обмежень. Задача буде розв'язана, якщо серед точок трикутника знайти такі, в яких цільова функція $F = x_1 + x_2$ набуває максимального і мінімального значення. Для знаходження цих точок побудуємо пряму $x_1 + x_2 = 4$ (в загальному випадку $c_1x_1 + c_2x_2 = h$, де $F = c_1x_1 + c_2x_2,\ h$ —довільне число) і вектор $\bar{C}$=(1;1).

Пересуваючи дану пряму паралельно самій собі в напрямку вектора $\bar{C}$, бачимо, що останньою спільною точкою даної прямої з многогранником розв'язків буде точка *C*. Отже, $F_{max} = F(6{,}1) = 6 + 1 = 7$.

Для знаходження мінімального значення пряму $x_1 + x_2 = 4$ пересуваємо паралельно самій собі в напрямку вектора $-\bar{C}$. Останньою спільною точкою є точка *A*. Отже, $F_{min} = F(0;3) = 3$.

Приклад 2. Знайти максимальне значення функції

$$F = -16x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 + 5x_5$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_5 = 8 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Розв'язання. Задача задана в основній (канонічній) формі. Число невідомих дорівнює п'яти. Дану задачу слід звести до задачі, в якій число невідомих дорівнювало б двом.

$$\begin{cases} x_3 = 10 - 2x_1 - x_2 \\ x_4 = 6 + 2x_1 - 3x_2 \\ x_5 = -8 + 2x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2) = -16x_1 - x_2 + 10 - 2x_1 - x_2 + 5(6 + 2x_1 - 3x_2) + 5(-8 + 2x_1 + 4x_2).$$

Дослідимо цільову функцію $F(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 8 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Побудуємо многокутник розв'язків:

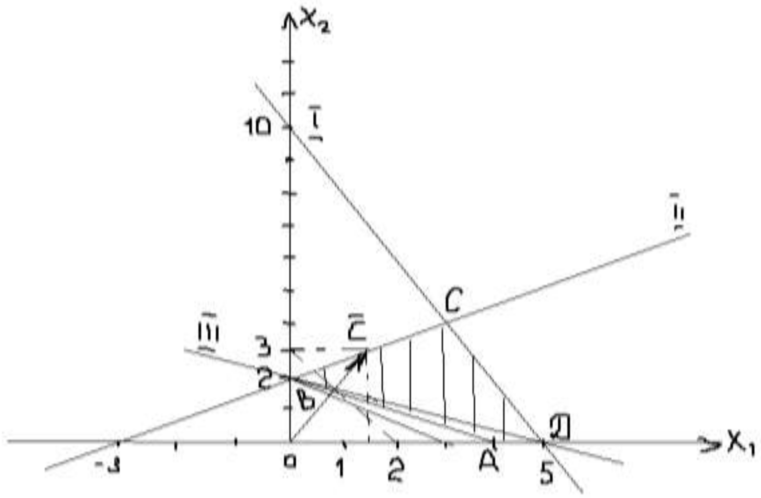

Рис. 2

Многокутник розв'язків *ABCD*, де *A*(4;0), *B*(0;2), *C*(3;4), *D*(5;0).

$\bar{C}$=(2;3). Пересуваємо пряму $2x_1 + 3x_2 = h$ (наприклад, *h*=6) паралельно самій собі в напрямку вектора $\bar{C}$. Останньою вона перетинає точку C(3;4). Тому $F_{max} = F(3; 4) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 18$.

Опорний план $X^*(3; 4; 0; 0; 14)$.

Узагальнюючи вищесказане, можна стверджувати, що початкова задача лінійного програмування полягає в знаходженні такої точки многокутника розв'язків, в якій цільова функція F набуває максимального значення. Ця точка існує тоді, коли многокутник розв'язків не порожній, і на ньому цільова функція обмежена зверху. При вказаних умовах в одній з вершин многокутника розв'язків цільова функція набуває максимального значення.

Для визначення даної вершини будуємо лінію рівня $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ (де $h -$ деяка стала), яка проходить через многокутник розв'язків, і будемо пересувати її до тих пір, поки вона не пройде через останню спільну точку з многокутником розв'язків. Координати вказаної точки визначають оптимальний план даної задачі. При розв'язанні даної задачі можливі випадки, що зображені на рисунках 3-6.

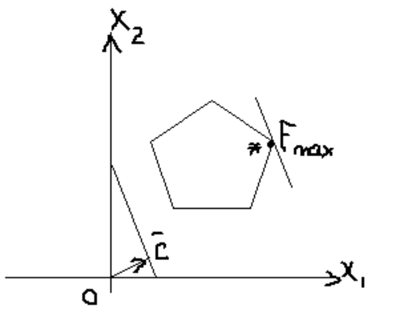

Рис.3

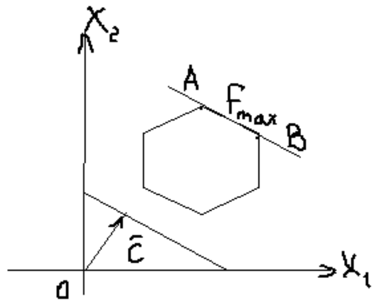

Рис.4

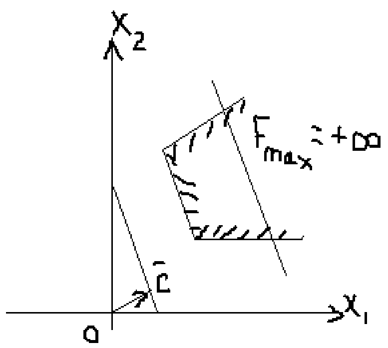

Рис.5

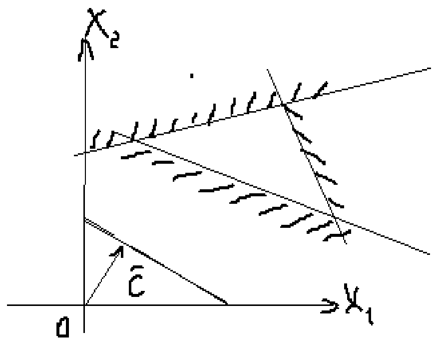

Рис.6

Рис.3 характеризує випадок, коли цільова функція набуває максимального значення в єдиній точці. На рис.4 максимального значення цільова функція досягає в будь-якій точці відрізку AB (тобто є їх нескінченна множина). На рис.5 зображено випадок, коли цільова функція не обмежена зверху, на рис.6 – випадок, коли система обмежень задачі несумісна.

1.4 Задачі для самостійного розв'язування

1. Продукція молочного заводу – молоко, кефір і сметана, розфасовані по пляшках. На виробництво 1 т молока, кефіру і сметани потрібно відповідно 1010, 1010 і 9450 кг молока. При цьому витрати робочого часу при розливі 1 т молока і кефіру становлять 0,18 і 0,19 машино-годин. Витрати автомату для розливу сметани – 3,25 години. Всього завод може використовувати 136 т молока для виробництва незбираної молочної продукції. Основне обладнання може бути зайнято протягом 21,4 машино-годин, а автомати для фасування сметани – протягом 16,25 годин. Прибуток від продажу 1 т молока, кефіру і сметани становить відповідно 3000, 2200 і 13600 грн. Завод повинен виробляти не менше 100 т молока щодня. Обмежень на виробництво іншої продукції немає. Необхідно визначити, яка продукція і в якій кількості повинна щодня виготовлятися заводом, щоб прибуток від її реалізації був максимальним. Скласти математичну модель задачі.

2. У трьох пунктах відправлення зосереджений однорідний вантаж в кількостях, рівних 420, 380 і 400 т відповідно. Даний вантаж повинен перевозитися в три пункти призначення в кількості, що дорівнює 260, 520 і 420 т відповідно. Вартість перевезення 1 т вантажу від кожного пункту відправлення до кожного пункту призначення задається матрицею

$$\left(C_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 7 \end{pmatrix} \text{у. о.}$$

Знайдіть план перевезень, який забезпечує вивезення товару, наявного в пунктах відправлення, і доставку необхідного вантажу в пункти призначення з мінімальними загальними витратами на перевезення.

3. Кондитерська фабрика з виробництва трьох видів карамелі *A*, *B* і *C* використовує три види основної сировини: цукровий пісок, патоку і фруктове пюре. Норми витрати сировини кожного виду на виробництво 1 т карамелі наведено в таблиці

Вид сировини	Норми витрат сировини в т на 1 т карамелі			Загальна кількість сировини (т)
	A	*B*	*C*	
Цукровий пісок	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,4	0,4	0,3	600
Фруктове пюре	----	0,1	0,1	120
Прибуток від реалізації 1 т продукції (ум.од.)	108	112	126	

Знайдіть план виробництва карамелі, що забезпечує максимальний прибуток від її реалізації.

4. При відгодівлі тварин кожна тварина повинна щодня отримувати не менше 60 одиниць поживної речовини *A*, не менше 50 одиниць речовини *B* і не менше 12 одиниць речовини *C*. Ці поживні речовини містять три види кормів. Вміст поживних речовин на 1 кг кожного виду корму наведено в таблиці.

Поживні речовини	Кількість одиниць поживних речовин в 1 кг корму виду		
	I	II	III

A	1	3	4
B	2	4	2
C	1	4	3

Складіть добовий раціон, що забезпечує надходження необхідної кількості поживних речовин при мінімальних грошових витратах, якщо ціна 1 кг корму I-го типу становить 9 у.о., корму II типу - 12 у.о., корму III типу - 10 у.о.

5. При вирощуванні певної культури може використовуватися i-й вид добрив в кількості не більше ніж b_i кг ($i = \overline{1, m}$). Уся посівна площа містить n грунтово-кліматичних зон, причому площа j-тої зони дорівнює d_j га ($j = \overline{1, n}$). Внесення на кожний гектар площі j-тої зони 1 кг добрив i-го виду підвищує середню врожайність на C_{ij} центнерів. Необхідно розподілити виділений фонд добрив між посівними зонами так, щоб сумарний приріст врожайності сільськогосподарських культур за рахунок внесення добрив був максимальним.

6. Записати задачу, що полягає в мінімізації функції

$F = -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \geq 8 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

у формі основної задачі лінійного програмування.

7. Записати задачу у формі основної задачі лінійного програмування

$$F = -2x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6x_3 \leq 12 \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 = 14 \\ -3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 18 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

8. Записати задачу у формі основної задачі лінійного програмування

$$F = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 12 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 18 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 16 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

9. Записати задачу у формі основної задачі лінійного програмування

$$F = 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 \to min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 16 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 18 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

10. Записати задачу у формі основної задачі лінійного програмування

$$F = -3x_1 - 5x_2 - 6x_3 \to min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 \leq 12 \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \geq 15 \\ 3x_1 - 2x_2 + 10x_3 \leq 17 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

11−16. Використавши математичні моделі задач 1-5, записати їх у формі моделей основної задачі.

Використавши геометричну інтерпретацію, розв'яжіть задачі:

17.

$$F = x_1 + x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ -5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ 4x_1 + 6x_2 \geq 24 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

18.

$$F = -2x_1 + x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 12 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

19.

$$F = -x_1 + 4x_2 - 2x_4 - x_5 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 8 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

20.

$$F = -5x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 7 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

РОЗДІЛ 2. ЗНАХОДЖЕННЯ РОЗВ’ЯЗКІВ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД

Розв'язок будь-якої задачі лінійного програмування можна знайти або симплексним методом, або методом штучного базису. При цьому задачу слід записати у формі основної задачі лінійного програмування.

2.1 Симплексний метод

Симплексний метод розв'язування задачі лінійного програмування ґрунтується на переході від одного опорного плану до іншого, при якому значення цільової функції збільшується (за умови, що ця задача має оптимальний план і кожен з її опорних планів невироджений).

Нехай потрібно знайти максимальне значення функції

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \qquad (2.1.1)$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + a_{1\,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1\,n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2\,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2\,n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m + a_{m\,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{m\,n}x_n = b_m \\ x_j \geq 0\ (j = \overline{1,n}) \end{cases} \qquad (2.1.2)$$

Тут $a_{ij}, b_i, c_j \quad (i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$ – задані сталі числа ($m < n,\ b_i > 0$).

Векторна форма запису даної задачі має вигляд:

знайти максимум функції

$$F=\sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j \qquad (2.1.3)$$

за умов:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \cdots + x_mP_m + \cdots + x_nP_n = P_0 \qquad (2.1.4)$$

де $P_1 = (1\,, 0, \dots ,0)^T, P_2 = (0, 1, \dots ,0)^T, \dots, P_m = (0, 0, \dots ,1)^T,$

$P_{m+1} = (a_{1\,m+1}, a_{2\,m+1}, \dots, a_{m\,m+1})^T, \dots, P_n = (a_{1\,n}, a_{2\,n}, \dots, a_{m\,n})^T,$

$P_0 = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$.

Так як $\quad b_1P_1 + b_2P_2 + \cdots + b_mP_m = P_0$ (2.1.4), то план $X = (b_1; b_2; \dots; b_m; 0; \dots; 0)$ є опорним. Система одиничних векторів $P_1, P_2, \dots, P_m$ утворює базис m −вимірного простору. Тому кожний з векторів P_j $(j = \overline{0,n})$ може бути представлений у вигляді лінійної комбінації базисних векторів

$$P_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} P_i \qquad (j = \overline{0,n}) \tag{2.1.5}$$

Нехай $\quad Z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i\, x_{ij} \quad (j = \overline{1,n})$

$\Delta_j = Z_j - c_j \qquad (j = \overline{1,n})$

Так як вектори $P_1, P_2, \dots, P_m$ одиничні, то $x_{ij} = a_{ij}$,

$$Z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i\, a_{ij}, \quad \Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j \tag{2.1.6}$$

Теорема (ознака оптимальності опорного плану).

Опорний план $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*, 0, \dots, 0)$ задачі (2.1.1)-(2.1.2) є оптимальним, якщо $\Delta_j \geq 0$ для будь-якого j ($j = \overline{1,n}$).

Теорема. Якщо $\Delta_k < 0$ для деякого $j = k$ і серед чисел a_{ik} $(i = \overline{1,m})$ немає додатних $(a_{ik} \leq 0)$, то цільова функція задачі (2.1.1)-(2.1.2) не обмежена на множині її планів.

Теорема. Якщо опорний план X задачі (2.1.1)-(2.1.2) невироджений і $\Delta_k < 0$, але серед чисел a_{ik} є додатні, то існує опорний план X' такий, що $F(X') > F(X)$.

Сформульовані теореми дозволяють перевірити, чи є знайдений опорний план оптимальним, і виявити доцільність переходу до нового опорного плану.

Подальший обчислювальний процес зручно записати у вигляді симплекс-таблиці (табл. 2.1).

Таблиця 2.1 – І ітерація

i	базис	$c_б$	P_0	$\frac{c_1}{P_1}$	$\frac{c_2}{P_2}$	…	$\frac{c_r}{P_r}$	…	$\frac{c_m}{P_m}$	$\frac{c_{m+1}}{P_{m+1}}$	…	$\frac{c_k}{P_k}$	…	$\frac{c_n}{P_n}$
1	P_1	c_1	b_1	1	0	…	0	…	0	$a_{1\,m+1}$	…	a_{1k}	…	a_{1n}
2	P_2	c_2	b_2	0	1	…	0		0	$a_{2\,m+1}$	…	a_{2k}	…	a_{2n}
…. ….	……… ….	… ….	… ….	… ….	… …	… …	… …	… …	… ….	…… …….	… ….	… …	… ….	… ….
r	P_r	c_r	b_r	0	0	…	1	…	0	$a_{r\,m+1}$	…	a_{rk}	…	a_{rn}
….. ….	……… ………	… ….	… ….	… ….	… …	… …	… …	… …	… ….	……. ……..	… ….	… ….	… ….	… ….
m	P_m	c_m	b_m	0	0	…	0	…	1	$a_{m\,m+1}$	…	a_{mk}	…	a_{mn}
m+1			F_0	0	0	…	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_k	…	Δ_n

У стовпці $c_б$ –коефіцієнти при невідомих цільової функції. Перші m рядків визначаються початковими даними задачі, показники $(m+1)$ рядка обчислюють.

$$\Delta_j = z_j - c_j,\ \ z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} \quad (j = \overline{1,n})$$

$$F_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i \tag{2.1.3}$$

Після заповнення таблиці початковий опорний план перевіряють на оптимальність. В $(m+1)$ рядку може мати місце один з трьох випадків:

1) $\Delta_j \geq 0$ для $j = \overline{1,n}$
2) $\Delta_j < 0$ для деякого j і всі $a_{ij} \leq 0$ $(i = \overline{1,m})$
3) $\Delta_j < 0$ для деяких індексів j, і для кожного такого j принаймні одне з чисел $a_{ij} > 0$

У першому випадку початковий опорний план є оптимальним.

У другому випадку цільова функція не обмежена зверху на множині планів $(F_{max} = +\infty)$.

У третьому випадку можна перейти від початкового опорного плану до нового опорного плану, при якому значення цільової функції збільшиться. Цей перехід відбувається виключенням з початкового базису якого-небудь з векторів і введенням в нього нового вектора. У якості вектора, який вводимо до базису, можна взяти будь-який P_j, для якого $\Delta_j < 0$.

Нехай, наприклад, $\Delta_k < 0$ і було вирішено ввести до базису P_k. Для визначення вектора, що належить виключенню з базису, знаходять $\min(b_i / a_{ik})$ для усіх $a_{ik} > 0$. Нехай цей мінімум досягається при $i = r$. Тоді з базису виключають P_r, а число a_{rk} називають розв'язувальним елементом. Стовпець і рядок, на перетині яких знаходиться розв'язувальний елемент a_{rk}, називають напрямними (розв'язувальними).

Наступна ітерація симплекс-метода представлена в таблиці (табл. 2.2).

Таблиця 2.2 – ІІ ітерація

i	базис	$c_б$	P_0	$\frac{c_1}{P_1}$	$\frac{c_2}{P_2}$	…	$\frac{c_r}{P_r}$	…	$\frac{c_m}{P_m}$	$\frac{c_{m+1}}{P_{m+1}}$	…	$\frac{c_k}{P_k}$	…	$\frac{c_n}{P_n}$
1	P_1	c_1	b_1'	1	0	…	a_{1r}'	…	0	$a_{1\,m+1}'$	…	0	…	a_{1n}'
2	P_2	c_2	b_2'	0	1	…	a_{2r}'		0	$a_{2\,m+1}'$	…	0	…	a_{2n}'

…. ….	…… …….	… ….	… ….	… ….	… …	… …	… …	… …	… ….	…… …….	… … .	… …	… … .	… ….
r	P_k	c_k	$b_r{}'$	0	0	…	$a_{rr}{}'$	…	0	$a_{r\,m+1}{}'$	…	1	…	$a_{rn}{}'$
….. ….	…… ……	… ….	… ….	… ….	… …	… …	… …	… …	… ….	…… ……..	… …	… ….	… …	… ….
m	P_m	c_m	$b_m{}'$	0	0	…	$a_{mr}{}'$	…	1	$a_{m\,m+1}{}'$	…	0	…	$a_{mn}{}'$
m+1			$F_0{}'$	0	0	…	$z_r' - c_r$	…	0	z_{m+1}' $- c_{m+1}$	…	0	…	$z_n' - c_n$

$$b_i' = \begin{cases} b_i - \left(\frac{b_r}{a_{rk}}\right) a_{ik} & \text{при } i \neq r \\ \frac{b_r}{a_{rk}} & \text{при } i = r \end{cases} \tag{2.1.4}$$

$$a_{ij}' = \begin{cases} a_{ij} - \left(\frac{a_{rj}}{a_{rk}}\right) a_{ik} & \text{при } i \neq n \\ \frac{a_{rj}}{a_{rk}} & \text{при } i = n \end{cases} \tag{2.1.5}$$

Елементи $(m+1)$ рядка обчислюють за формулами

$$F_0' = F_0 - (\frac{b_r}{a_{rk}})\Delta_k$$

$$\Delta_j' = \Delta_i - (\frac{a_{rj}}{a_{rk}})\Delta_k \tag{2.1.6}$$

При переході від одного опорного плану до іншого доцільно ввести в базис вектор P_j, при якому число $(b_r/a_{rj})\Delta_j$ $(\Delta_j < 0,\ a_{rj} > 0)$ є максимальним за модулем. Для спрощення обчислень в базис будемо вводити вектор, для якого $|\Delta_j|$ максимальний, якщо $\Delta_j < 0$. Якщо таких чисел декілька, то в базис вводять вектор, який має той же індекс, що і максимальне з чисел $c_j(\Delta_j < 0)$.

Отже, пошук оптимального плану симплекс-методом включає в себе наступні етапи:

1. Знаходять опорний план.
2. Складають симплекс-таблицю.
3. З'ясовують, чи є хоча б одно від'ємне число Δ_j. Якщо немає, то знайдений опорний план оптимальний. Якщо ж серед чисел Δ_j є від'ємні, то або встановлюють нерозв'язність задачі, або переходять до нового опорного плану.
4. Знаходять напрямні стовпець і рядок. Напрямний стовпець визначається найбільшим за абсолютною величиною від'ємним числом Δ_j, а напрямний

рядок – мінімальним з відношень компонент стовпця вектора P_0 до додатних компонентів напрямного стовпця.

5. За формулами (2.1.4), (2.1.5), (2.1.6), (2.1.3) визначають компоненти нової симплекс-таблиці.
6. Перевіряють знайдений опорний план на оптимальність. Якщо план не є оптимальним, то повертаються до етапу 4, а у випадку отримання оптимального плану або встановлення нерозв'язності процес розв'язання задачі завершують.

Розглянемо симплекс-метод на прикладах.

Приклад 1. Для виготовлення продукції *A*, *B* і *C* підприємство використовує три різних види сировини. Норми витрат сировини на виробництво одного продукту кожного виду, ціна одного продукту *A*, *B* і *C*, а також загальна кількість сировини кожного виду наведені в таблиці 2.3:

Таблиця 2.3

Вид сировини	Норми витрат сировини (кг) на один продукт			Загальна кількість сировини в (кг)
	A	*B*	*C*	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Ціна одного продукту в у.о.	9	10	16	

Скласти план виробництва, при якому загальна вартість всієї виробленої підприємством продукції є максимальною.

Розв'язання. Складемо математичну модель задачі. Нехай продукції виду *A* виробляється x_1 штук, виду $B - x_2$, виду $C - x_3$. У зв'язку з обмеженнями на витрати сировини, змінні x_1, x_2, x_3 повинні задовольняти систему нерівностей

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \leq 360 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 192 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 180 \end{cases} \qquad (2.1.7)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Загальна вартість виробленої продукції

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \qquad (2.1.8)$$

Приходимо до математичної задачі: серед усіх невід'ємних розв'язків системи нерівностей (2.1.7) знайти такий, при якому функція (2.1.8) набуває максимального значення.

Запишемо цю задачу у формі основної задачі лінійного програмування:

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 360 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 192 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 = 180 \end{cases} \tag{2.1.9}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Запишемо (2.1.9) у вигляді:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0 \tag{2.1.10}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} 360 \\ 192 \\ 180 \end{pmatrix}.$$

Так як вектори P_4, P_5, P_6 одиничні й утворюють базис в R_3, то можна записати опорний план задачі:

$$X = (0; 0; 0; 360; 192; 180).$$

Складаємо симплекс- таблицю для першої ітерації.

$$.F_0 = (C, P_0);\ C = (0; 0; 0), F_0 = 0$$

$$Z_1 = (C, P_1) = 0;\ Z_2 = (C, P_2) = 0;\ Z_3 = (C, P_3) = 0$$

$$Z_4 = (C, P_4) = 0;\ Z_5 = (C, P_5) = 0;\ Z_6 = (C, P_6) = 0$$

$$C_1 = 9;\ C_2 = 10;\ C_3 = 16; C_4 = 0; C_5 = 0; C_6 = 0$$

$$\Delta_1 = Z_1 - C_1 = -9;\ \Delta_2 = Z_2 - C_2 = -10;\ \Delta_3 = Z_3 - C_3 = -16;$$

$$\Delta_4 = Z_4 - C_4 = 0;\ \Delta_5 = Z_5 - C_5 = 0;\ \Delta_6 = Z_6 - C_6 = 0.$$

Таблиця 2.4 – І ітерація

i	базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	360	18	15	**12**	1	0	0
2	$\boldsymbol{P_5}$	**0**	**192**	**6**	**4**	**8**	0	1	0
3	P_6	0	180	5	3	**3**	0	0	1
4			$F_0 = 0$	$\Delta_1 = -9$	$\Delta_2 = -10$	$\Delta_3 = -16$	$\Delta_4 = 0$	$\Delta_5 = 0$	$\Delta_6 = 0$

На першому кроці $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Ці значення змінних відповідають такому плану, при якому нічого не виробляється, сировина не використовується і прибуток дорівнює нулю. Цей план не є оптимальним. Це, також, видно з четвертого рядка, так як в ньому є три від'ємних числа $\Delta_1 = -9, \Delta_2 = -10, \Delta_3 = -16$. Від'ємні числа вказують на можливість збільшення загальної вартості продукції. Наприклад, якщо включити до плану один виріб виду A, то вартість продукції збільшиться на 9 у.о.; один виріб виду B – на 10 у.о.; один виріб виду C – на 16 у.о. Тому, з економічної точки зору, доцільним є включення до плану виробів C. Це справедливо і у відповідності до симплекс-методу, так як $|\Delta_3| = max$ у порівнянні до інших Δ_j.

Тому в базис вводимо новий вектор P_3. Визначимо вектор, який потрібно виключити зі старого базису P_4, P_5, P_6. Для цього знаходимо

$\theta_0 = \min(b_i/a_{i3})$ для $a_{i3} > 0$, тобто $\min(\frac{360}{12}; \frac{192}{8}; \frac{180}{3}) = \frac{192}{8} = 24$, тобто фактором, що обмежує виробництво продукції C, є об'єм сировини II виду. З урахуванням її наявності підприємство може виготовити 24 вироби виду C. Сировина II виду буде використана повністю. Отже, вектор P_5 виключаємо з базису. Складаємо таблицю для II ітерації.

Таблиця 2.5 – II ітерація

i	базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	$\boldsymbol{P_4}$	**0**	**72**	**9**	**9**	0	1	-3/2	0
2	P_3	16	24	3/4	**1/2**	1	0	1/8	0
3	P_6	0	108	11/4	**3/2**	0	0	-3/8	1
4			384	3	-2	0	0	2	0

Напрямний стовпець – 7, а напрямний рядок – 2 (вони виділені в таблиці I ітерації, розв'язувальний елемент 8). Спочатку заповнюємо елементи напрямного рядка. Елементи 2 рядка таблиці 2.1.4 ділимо на напрямний елемент 8. У рядку $C_б$ записуємо C_3=16 (формула 2.1.5).

Потім заповнюємо елементи стовпчиків для векторів, що входять в новий базис. У цих стовпчиках на перетині рядків і стовпців однойменних векторів проставляємо одиниці, а всі інші елементи дорівнюють нулю.

Для визначення інших елементів застосовуємо правило трикутника (2.1.5)

$$a'_{ij} = \begin{cases} a_{rj}/a_{rk} & \text{при } i = r \\ a_{ij} - (a_{rj}/a_{rk})a_{ik} & \text{при } i \neq r \end{cases}$$

$$b_i' = \begin{cases} b_r/a_{rk} & \text{при } i = r \\ b_i - (b_r/a_{rk})a_{ik} & \text{при } i \neq r \end{cases}$$

$$b'_1 = b_1 - (b_2/a_3) \cdot a_{13} = 360 - 192/8 \cdot 12 = 72$$

$$b'_2 = b_2/a_{23} = 192/8 = 24$$

$$b_3' = b_3 - (b_2/a_{23}) \cdot a_{33} = 180 - 192/8 \cdot 3 = 108$$

$$a_{11}' = a_{11} - (a_{21}/a_{23}) \cdot a_{13} = 18 - 16/8 \cdot 12 = 9$$

$$a_{12}' = a_{12} - (a_{22}/a_{23}) \cdot a_{13} = 15 - (4/8) \cdot 12 = 9$$

$$a_{15}' = a_{15} - (a_{13}/a_{23}) \cdot a_{25} = 0 - (12/8) \cdot 1 = -3/2$$

$$a_{31}' = a_{31} - (a_{21}/a_{23}) \cdot a_{33} = 5 - 6/8 \cdot 3 = 11/4$$

$$a_{32}' = a_{32} - (a_{22}/a_{23}) \cdot a_{33} = 3 - 4/8 \cdot 3 = 3/2$$

$$a_{35}' = a_{35} - (a_{25}/a_{23}) \cdot a_{33} = 0 - 1/8 \cdot 3 = -3/8$$

Заповнимо четвертий рядок таблиці:

$$F_0' = (C, P_0) = 0 \cdot 72 + 16 \cdot 24 + 0 \cdot 108 = 384$$

або другим способом за правилом трикутника:

$$F_0' = F_0 - (b_r/a_{rk}) \cdot \Delta_k = 0 - 192/8 \cdot (-16) = 384$$

$$\Delta_j' = \Delta_j - (a_{rj}/a_{rk}) \cdot \Delta_k$$

$$\Delta_1' = -9 - (6/8) \cdot (-16) = 3$$

$$\Delta_2' = -10 - (4/8) \cdot (-16) = -2$$

$$\Delta_3' = -16 - (8/8) \cdot (-16) = 0$$

$$\Delta_4' = 0 - (0/8) \cdot (-16) = 0$$

$$\Delta_5' = 0 - (1/8) \cdot (-16) = 2$$

$$\Delta_6' = 0 - (0/8) \cdot (-16) = 0$$

З таблиці 2.5 видно, що знайдений на II ітерації план задачі не є оптимальним ($\Delta_2 < 0$). Введемо в новий базис вектор P_2. Визначимо вектор, який слід виключити зі старого базису. Знайдемо $\theta_0 = \min(72/9;\ 24/\frac{1}{2};\ 108/\frac{3}{2}) = \frac{72}{9} = 8$, тобто вектор P_4 виключаємо з базису. Отже, розв'язувальний рядок при P_4, розв'язувальний стовпчик при P_2, розв'язувальний елемент – 9.

За тими ж правилами заповнюємо таблицю 2.6.

Таблиця 2.6 – III ітерація

i	базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	10	8	1	1	0	1/9	-1/6	0
2	P_3	16	20	1/4	0	1	-1/18	5/24	0

3	P_6	0	96	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1
4			400	5	0	0	2/9	5/3	0

Новий опорний план $X = (0; 8; 20; 0; 0; 96)$.

Так як в четвертому рядку немає від'ємних чисел, то даний опорний план є оптимальним і F_{max}=400.

Отже, план випуску продукції, що містить виготовлення 8 виробів *B* і 20 виробів *C*, є оптимальним. При даному плані випуску повністю використовується сировина I та II виду, так як $8 \cdot 15 + 20 \cdot 12 = 360$ і залишається невикористаною 96 кг сировини III виду ($180 - 8 \cdot 3 - 20 \cdot 3 = 96$(кг)).

Оптимальним планом не передбачено виготовлення виробів *A*. Включення їх до плану випуску привело б до зменшення загальної вартості. Максимальна вартість продукції, що виготовляється дорівнює 400 у.о.

Усі обчислення зручно звести до однієї таблиці:

i	базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0
2	P_5	0	192	6	4	8	0	1	0
3	P_6	0	180	5	3	3	0	0	1
4			0	-9	-10	-16	0	0	0
1	P_4	0	72	9	9	0	1	-3/2	0
2	P_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	P_6	0	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
4			384	3	-2	0	0	2	0
1	P_2	10	8	1	1	0	1/9	-1/6	0
2	P_3	16	20	1/4	0	1	-1/18	5/24	0
3	P_6	0	96	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1
4			400	5	0	0	2/9	5/3	0

Випишемо зв'язок між базисними і небазисними змінними:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \cdot x_2 + 1/4 \cdot x_3 + 5/4 \cdot x_6 \\ x_4 = 1/9 \cdot x_2 - 1/18 \cdot x_3 - 1/6 \cdot x_6 \\ x_5 = -1/6 \cdot x_2 + 5/24 \cdot x_3 - 1/8 \cdot x_6 \end{cases}$$

Приклад 2. Знайти максимум функції $F = 2x_1 - 6x_2 + 5x_5$ за умов

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 20 \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 + 3x_5 = 24 \\ 3x_1 - x_2 - 12x_5 + x_6 = 18 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,6})$$

Розв'язання. Запишемо систему рівнянь у векторній формі:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix}, P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 24 \\ 48 \end{pmatrix}$$

Базисні вектори P_3, P_4, P_6 ; опорний план задачі:

$$X = (0; 0; 20; 24; 0; 18).$$

Складаємо симплекс- таблицю:

Таблиця 2.7 – I ітерація

i	базис	$C_б$	P_0	2	-6	0	0	5	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_3	0	20	-2	1	1	0	1	0
2	P_4	0	24	-1	-2	0	1	3	0
3	P_6	0	18	3	-1	0	0	-12	1
4			0	-2	6	0	0	-5	0

$$\Delta_j = (C_б; P_j) - C_j$$

Опорний план не є оптимальним. Розв'язувальний стовпець при P_5, так як $|\Delta_5| = 5 = \max(|\Delta_j|)$.

Знайдемо розв'язувальний рядок:

$$\theta_0 = \min(20/1;\ 24/3) = \frac{24}{3} = 8.$$

Отже, розв'язувальний рядок – другий (при P_4). Елемент P_4 виключаємо з базису на користь P_5. Складаємо нову симплекс-таблицю:

Таблиця 2.8 – II ітерація

i	базис	$C_б$	P_0	2	-6	0	0	5	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_3	0	12	-5/3	5/3	1	-1/3	0	0
2	P_5	5	8	-1/3	-2/3	0	1/3	1	0
3	P_6	0	18	-1	-9	0	4	0	1
4			40	-11/3	8/3	0	5/3	0	0

Як видно (в останньому рядку серед Δ_j є від'ємне число), опорний план не є оптимальним. Так як $\Delta_1 = -11/3 < 0$, то P_1 введемо в базис. Оскільки в стовпці вектора P_1 немає додатних елементів, то дана задача не має оптимального плану.

Приклад 3. Знайти розв'язок задачі, що полягає у визначенні максимального значення функції $F = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5$ за умов

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 7 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1{,}5})$$

і надати геометричну інтерпретацію розв'язку.

Розв'язання. Запишемо систему рівнянь у векторній формі:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 = P_0$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Базис утворюють три вектори P_3, P_4, P_5.

Складемо симплекс-таблицю:

i	базис	$C_б$	P_0	$C_1 = 2$	$C_2 = 1$	$C_3 = 1$	$C_4 = 1$	$C_5 = -1$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	-1	5	1	1	1	0	0
2	P_4	1	9	2	1	0	1	0
3	P_5	-1	7	1	2	0	0	1
4			-3	-2	-3	0	0	0
1	P_3	-1	3/2	1/2	0	1	0	-1/2
2	P_4	1	11/2	3/2	0	0	1	-1/2
3	P_2	1	7/2	1/2	1	0	0	1/2
4			15/2	-1/2	0	0	0	3/2
1	P_1	2	3	1	0	2	0	-1
2	P_4	1	1	0	0	-3	1	1
3	P_2	1	2	0	1	-1	0	1
4			9	0	0	1	0	1

З таблиці видно, що оптимальний план $X^* = (3; 2; 0; 1; 0)$, $F_{max} = 9$. Дамо геометричну інтерпретацію процесу вирішення поставленої задачі. Для цього представимо задачу в стандартній формі.

$F = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow max,$ за умов

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1 + 2x_2 \leq 7 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$F(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 - (5 - x_1 - x_2) + (9 - 2x_1 - x_2) - (7 - x_1 - 2x_2) =$
$= -3 + 2x_1 + 3x_2 \to max$

Початковий опорний план $X = (0; 0; 5; 9; 7)$ відповідає точці $O(0; 0)$ на рис.7. Після II ітерації отримали новий опорний план $X = (0; \frac{5}{2}; \frac{3}{2}; \frac{11}{2}; 0)$, якому відповідає точка $A(0; 3{,}5)$; після III ітерації отримали опорний план $X^* = (3; 2; 0; 1; 0)$, що відповідає точці $B(3; 2)$. Цей план є оптимальним. $F_{max} = 9$.

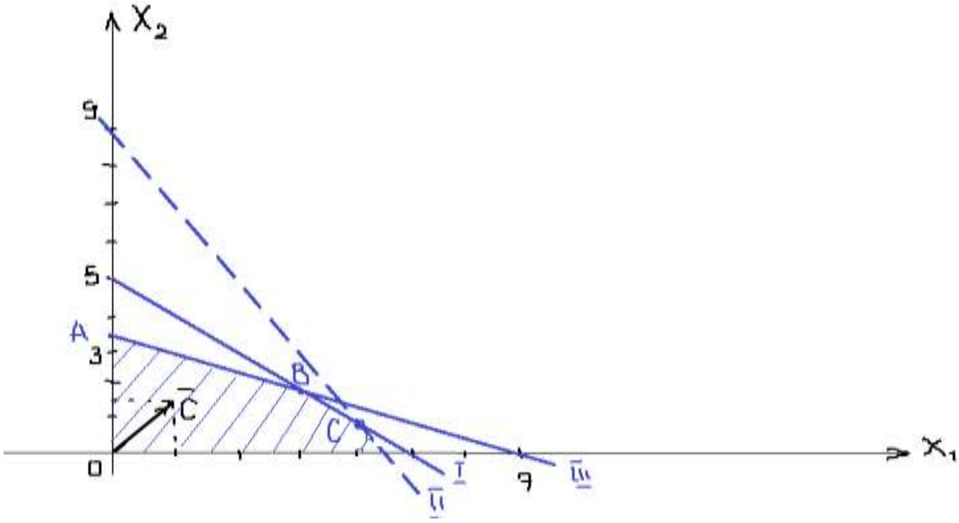

Рис.7

2.2 Метод штучного базису

В багатьох задачах лінійного програмування, які записані в основній формі та мають опорні плани, серед векторів P_j не завжди є m одиничних. Розглянемо задачу:

нехай потрібно знайти максимум функції

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \qquad (2.2.1)$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, n}) \end{cases} \qquad (2.2.2)$$

де $b_i \geq 0 \ (i = \overline{1, m}), m < n$ і серед векторів $P_1 = (a_{11}; a_{21}; \dots; a_{m1})^T$; $P_2 = (a_{12}; a_{22}; \dots; a_{m2})^T$;…; $P_n = (a_{1n}; a_{2n}; \dots; a_{mn})^T$ немає m одиничних.

<u>Означення</u>. Задача визначення максимального значення функції

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n - Mx_{n+1} - \cdots - Mx_{n+m} \qquad (2.2.3)$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_j \geq 0\ (j = \overline{1, n+m}) \end{cases} \qquad (2.2.4)$$

де M –деяке додатне число, значення якого наперед невідомо, називається ***розширеною задачею*** по відношенню до задачі (2.2.1)–(2.2.2).

Розширена задача (2.2.3)—(2.2.4) має опорний план $X = (0; 0; \dots; 0; b_1; \dots; b_m)$, який визначається системою одиничних векторів $P_{n+1}, P_{n+2}, \dots, P_{n+m}$, що утворюють базис m –вимірного векторного простору, який називається штучним. Самі вектори P_j $(j = \overline{n+1, n+m})$ та змінні x_j $(j = \overline{n+1, n+m})$ називаються штучними. Так як розширена задача має опорний план, то її розв'язок може бути знайдений симплексним методом.

Теорема. Якщо в оптимальному плані $X^* = (x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*; x_{n+1}^*; \dots; x_{n+m}^*)$ розширеної задачі (2.2.3) – (2.2.4) значення штучних змінних $x_{n+i}^* = 0$ $(i = \overline{1, m})$, то $X^* = (x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*)$ є оптимальним планом задачі (2.2.1)—(2.2.2).

При опорному плані $X = (0; 0; \dots; 0; b_1; b_2; \dots; b_m)$ розширене значення лінійної форми

$$F_0 = -M \sum_{i=1}^{m} b_i\,,\ \Delta_j = Z_j - C_j = -M \sum_{i=1}^{m} a_{ij} - C_j,$$

таким чином, F_0 і Δ_j складаються з двох частин, одна з яких залежить від M, а інша – ні.

Симплекс-таблиця розширеної задачі містить на один рядок більше, ніж звичайна симплекс-таблиця, причому в $(m+2)$-й рядок записують координати при M, а в $(m+1)$-й – доданки, які не містять M.

При переході від одного опорного плану до іншого до базису вводять вектор, відповідний найбільшому за модулем від'ємному числу $(m+2)$-го рядка. Штучний вектор, виключений з базису, в результаті деякої ітерації, в подальшому немає сенсу вводити в жоден з наступних базисів, перетворення стовпців цього вектора зайве. Може трапитися так, що в результаті жоден із штучних векторів не буде виключено з базису.

Перерахунок симплекс-таблиць при переході від одного опорного плану до іншого здійснюється за загальними правилами симплексного методу.

Ітераційний процес по $(m+2)$-му рядку ведеться до тих пір, поки:
1) або всі штучні вектори не будуть виключені з базису;
2) або не всі штучні вектори виключені, але $(m+2)$-й рядок не містить більше від'ємних елементів в стовпцях $P_1, P_2, \dots, P_{n+m}$.

У першому випадку базису відповідає деякий опорний план початкової задачі і визначення її оптимального плану відбувається по $(m+1)$-му рядку.

У другому випадку, якщо елемент, який знаходиться в $(m+2)$-му рядку стовпця P_0, від'ємний, початкова задача немає розв'язку; якщо ж він дорівнює нулю, то знайдений опорний план початкової задачі є виродженим і базис містить хоча б один з векторів базису.

Якщо початкова задача містить декілька одиничних векторів, то їх слід включити до штучного базису.

Таким чином, процес розв'язання задачі (2.2.1)—(2.2.1) методом штучного базису включає наступні етапи:

1. Складають розширену задачу (2.2.3)—(2.2.4).
2. Знаходять опорний план розширеної задачі.
3. За допомогою звичайних обчислень симплекс-метода виключають штучні вектори з базису. В результаті або знаходять опорний план, або встановлюють її нерозв'язність;
4. Використовуючи знайдений опорний план задачі (2.2.1)–(2.2.2), або знаходять симплекс-методом оптимальний план початкової задачі, або встановлюють її нерозв'язність.

Приклад 4. Знайти мінімум функції $F = -2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 22 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 10 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1,4})$$

Розв'язання. Запишемо задачу у формі основної задачі лінійного програмування:

$F = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 \to max$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 22 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 = 10 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1,6})$$

Розглянемо вектори:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} 24 \\ 22 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Серед них є тільки два одиничних P_4, P_5. Тому додамо штучну змінну $x_7 \ge 0$ та розглянемо розширену задачу

$F = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 - Mx_7 \to max$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 22 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 + x_7 = 10 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1{,}7})$$

Розширена задача має опорний план $X = (0; 0; 0; 24; 22; 0; 10)$, який визначається системою трьох одиничних векторів P_4, P_5, P_7.

Складемо розширену симплекс-таблицю:

Таблиця 2.9 – I ітерація

i	базис	$C_б$	P_0	2	-3	6	1	0	0	$-M$
				P_1	P_2	$\boldsymbol{P_3}$	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_4	1	24	2	1	**-2**	1	0	0	0
2	P_5	0	22	1	2	**4**	0	1	0	0
3	$\boldsymbol{P_7}$	$\boldsymbol{-M}$	**10**	**1**	**-1**	**2**	**0**	**0**	**-1**	**1**
4			24	0	4	**-8**	0	0	0	0
5			-10	-1	1	**-2**	0	0	1	0

$$F_0 = (C_б, P_0) = 24 - 10M$$

$$\Delta_j = Z_j - C_j, \quad Z_j = (C_б, P_j), \qquad j = \overline{1{,}7}$$

$$Z_1 = 2 - M, Z_2 = 1 + M, Z_3 = -2 - M, Z_4 = 1, Z_5 = 0, Z_6 = M, Z_7 = -M$$

$$\Delta_1 = -M, \Delta_2 = 4 + M, \Delta_3 = -8 - 2M, \Delta_4 = 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 = M, \Delta_7 = 0$$

У п'ятому рядку в стовпцях P_i $(i = \overline{1{,}7})$, маємо два від'ємних числа. Це говорить про те, що даний опорний план не є оптимальним. У новий базис вводимо вектор P_3 (так як $max(|\Delta_j|) = |\Delta_3| = 2$). Щоб визначити вектор, який належить виключенню зі старого базису, знайдемо $\theta_0 = \min(\frac{22}{4}; \frac{10}{2})$=5. Це вектор P_7.

Напрямний рядок при P_7, напрямний стовпчик P_3, напрямний елемент – 2. Вектор P_7 немає сенсу вводити в жоден з наступних базисів, тому відповідний стовпчик не заповнюємо. Складаємо II ітерацію симплекс-таблиці, вона містить лише чотири рядки, так як штучних векторів у базисі більше немає.

Таблиця 2.10 – II ітерація

i	базис	$C_б$	P_0	2	-3	6	1	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	1	34	3	0	0	1	0	-1
2	P_5	0	2	-1	4	0	0	1	2
3	P_3	6	5	1/2	-1/2	1	0	0	-1/2
4			64	4	0	0	0	0	-4

Опорним є план $X=(0;0;5;34;2)$, але він не є оптимальним, бо в останньому рядку маємо від'ємний елемент у стовпці P_6. Введемо P_6 у базис замість P_5, так як $\theta_0=\min(b_i/a_{ik})=\frac{2}{2}=1$, $a_{ik}\geq 0, k-$ напрямний рядок.

Заповнюємо наступну таблицю:

Таблиця 2.11 – III ітерація

i	базис	$C_б$	P_0	2	-3	6	1	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	1	34	5/2	2	0	1	1/2	0
2	P_6	0	1	-1/2	2	0	0	1/2	1
3	P_3	6	11/2	1/4	1/2	1	0	1/4	0
4			68	2	8	0	0	2	0

У четвертому рядку серед чисел Δ_j немає від'ємних. Це означає, що знайдений опорний план є оптимальним.

$$X^*=(0;0;0;11/2;35;0;1),\ \ F_{max}=68,\ \ F_{min}=-68.$$

Розв'язання даної задачі можна звести в таблицю:

i	базис	$C_б$	P_0	2	-3	6	1	0	0	$-M$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_4	1	24	2	1	-2	1	0	0	0
2	P_5	0	22	1	2	4	0	1	0	0
3	P_7	$-M$	10	1	-1	2	0	0	-1	1
4			24	0	4	-8	0	0	0	0
5			-10	-1	1	-2	0	0	1	0
1	P_4	1	34	3	0	0	1	0	-1	
2	P_5	0	2	-1	4	0	0	1	2	
3	P_3	6	5	1/2	-1/2	1	0	0	-1/2	
4			64	4	0	0	0	0	-4	
1	P_4	1	34	5/2	2	0	1	1/2	0	
2	P_6	0	1	-1/2	2	0	0	1/2	1	
3	P_3	6	11/2	1/4	1/2	1	0	1/4	0	
4			68	2	8	0	0	2	0	

Приклад 5. Знайти максимум функції $F=-2x_1+x_2+x_4$ за умов

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=10 \\ -2\,x_1-x_2-2x_4-x_5=18 \\ 3x_1+2x_2+x_4-x_6=36 \end{cases}$$

$$x_j\geq 0\ \ (j=\overline{1,6})$$

Розв'язання. Так як серед векторів

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

маємо лише один одиничний (P_3), то знаходимо розв'язок розширеної задачі:

$F = -2x_1 + x_2 + x_4 - Mx_7 - Mx_8 \rightarrow max$ за умов

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10 \\ -2x_1 - x_2 - 2x_4 - x_5 + x_7 = 18 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 - x_6 + x_8 = 36 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,8})$$

Розширена задача має опорний план $X = (0; 0; 10; 0; 0; 0; 18; 36)$, який визначається системою трьох одиничних векторів P_3, P_7, P_8.

Складаємо таблицю І ітерації.

Таблиця 2.12 – І ітерація

i	базис	$C_б$	P_0	-2	1	0	1	0	0	$-M$	$-M$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
1	P_3	0	10	1	-2	1	0	0	0	0	0
2	P_7	$-M$	18	-2	-1	0	-2	-1	0	1	0
3	P_8	$-M$	36	3	2	0	1	0	-1	0	1
4			0	2	-1	0	-1	0	0	0	0
5			-54	-1	-1	0	1	1	1	0	0

$$F_0 = (C_б, P_0) = 0 \cdot 10 - 18M - 36M = -54M$$

$$\Delta_j = Z_j - C_j, \quad Z_j = \left(C_б, P_j\right), \qquad j = \overline{1,8}$$

$$Z_1 = -M, Z_2 = -M, Z_3 = 0, Z_4 = M, Z_5 = M, Z_6 = M, Z_7 = -M, Z_8 = -M$$

$$\Delta_1 = 2 - M, \Delta_2 = -1 - M, \Delta_3 = 0, \Delta_4 = -1 + M, \Delta_5 = M, \Delta_6 = M, \Delta_7 = 0, \Delta_8 = 0$$

У п'ятому рядку таблиці в стовпцях P_1 та P_2 є від'ємні числа (дорівнюють -1). У новий базис можна ввести як P_1, так і P_2. Введемо P_2. Виключимо P_8 , так як серед коефіцієнтів P_2 тільки одне додатне число в рядку P_8. Складаємо таблицю ІІ ітерації:

Таблиця 2.13 – ІІ ітерація

i	базис	$C_б$	P_0	-2	1	0	1	0	0	$-M$	$-M$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8

1	P_3	0	46	4	0	1	1	0	-1	0	0
2	P_7	$-M$	36	-1/2	0	0	-3/2	-1	-1/2	1	0
3	P_2	1	18	3/2	1	0	1/2	0	-1/2	0	1/2
4			18	7/2	0	0	-1/2	0	-1/2	0	0
5			-36	1/2	0	0	3/2	1	1/2	0	0

У п'ятому рядку таблиці в стовпцях $P_1, \dots, P_7$ немає від'ємних чисел, у стовпці P_0 – від'ємне число (- 36). Отже, початкова задача не має опорного плану.

Приклад 6. Знайти максимум функції $F = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4$ за умов

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 20 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 10 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \;\; (j = \overline{1,4})$$

Розв'язання. Запишемо задачу у формі основної задачі лінійного програмування:

$F = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 \to max$ за умов

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_5 = 20 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \;\; (j = \overline{1,6})$$

Серед векторів

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 24 \end{pmatrix}$$

всього два одиничних. Тому знайдемо розв'язок задачі методом штучного базису.

$F = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 - Mx_7 \to max$ за умов

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_5 = 20 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 + x_7 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \;\; (j = \overline{1,7})$$

Розширена задача має опорний план $X = (0; 0; 0; 24; 20; 0; 10)$, який визначається системою трьох одиничних векторів P_4, P_5, P_7.

Складемо таблицю:

Таблиця 2.14 – I ітерація

i	базис	$C_б$	P_0	2	-3	6	1	0	0	$-M$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_5	0	20	1	2	-4	0	1	0	0
2	P_7	$-M$	10	1	-1	2	0	0	-1	1
3	P_4	1	24	2	1	-2	1	0	0	0
4			24	0	4	-8	0	0	0	0
5			-10	-1	1	-2	0	0	1	0

$$F_0 = (C_б, P_0) = 24 - 10M$$

$$\Delta_j = Z_j - C_j, \quad Z_j = \left(C_б, P_j\right), \quad j = \overline{1,7}$$

$$Z_1 = 2 - M, Z_2 = 1 + M, Z_3 = -2 - 2M, Z_4 = 1, Z_5 = 0, Z_6 = M, Z_7 = -M$$

$$\Delta_1 = -M, \Delta_2 = 4 + M, \Delta_3 = -8 - 2M, \Delta_4 = 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 = M, \Delta_7 = 0$$

У п'ятому рядку, в стовпцях при P_j ($j=\overline{1,7}$) є від'ємні числа. Максимальне з них за модулем у стовпці P_3 (2). Вводимо в базис вектор P_3 замість P_7 (штучний вектор). Складаємо таблицю II ітерації (вона на один стовпець менше):

Таблиця 2.15 – II ітерація

i	базис	$C_б$	P_0	2	-3	6	1	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_5	0	10	3	0	0	0	1	-2
2	P_3	6	5	1/2	-1/2	1	0	0	-1/2
3	P_4	1	34	3	0	0	1	0	-1
4			64	4	0	0	0	0	-4

З таблиці видно, що знайдений опорний план $X = (0; 0; 5; 34; 40; 0)$ не є оптимальним, оскільки в четвертому рядку в останньому стовпці є від'ємне число, але усі коефіцієнти в цьому стовпці від'ємні числа. Це значить, що дана задача не має оптимального плану.

2.3 Задачі для самостійного розв'язування

Використовуючи розглянуті методи, знайдіть розв'язки задач:

1. $F = 3x_1 + 2x_3 - 6x_6 \to max$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = 18 \\ -3\,x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_6 = 24 \\ x_1 + 3x_3 + x_5 - 4x_6 = 36 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,6})$$

2. $F = 2x_1 + 3x_2 - x_4 \rightarrow max$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 18 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_6 = 24 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,6})$$

3. $F = 8x_2 + 7x_4 + x_6 \rightarrow max$ за умов

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_4 - 2x_6 = 12 \\ 4\,x_2 + x_3 - 4x_4 - 3x_6 = 12 \\ 5x_2 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 25 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,6})$$

4. $F = x_1 + 3x_2 - 5x_4 \rightarrow max$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28 \\ -34\,x_1 + 5x_2 - 3x_4 + x_5 = 30 \\ x_1 - 2x_2 + 8x_4 + x_6 = 32 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,6})$$

5. $F = 3x_1 + 2x_5 - 5x_6 \rightarrow max$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_5 + 5x_6 = 34 \\ 4x_1 + x_3 + 2x_5 - 4x_6 = 28 \\ -3x_1 + x_4 - 3x_5 + 6x_6 = 24 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,6})$$

6. $F = x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow max$ за умов

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,3})$$

7. $F = 8x_1 - 3x_2 + x_3 + 6x_4 - 5x_5 \rightarrow max$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 28 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 31 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 118 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,5})$$

8. $F = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 + 8x_6 \rightarrow max$ за умов

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 + x_6 = 120 \\ 2x_1 + 9x_2 - 5x_3 - 7x_4 + 4x_5 + 2x_6 = 320 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,6}) \end{cases}$$

9. $F = -3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 + 8x_6 \rightarrow max$ за умов

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 6x_5 + x_6 = 60 \\ 7x_1 - 17x_2 + 26x_3 + 31x_4 - 35x_5 + 6x_6 = 420 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,6}) \end{cases}$$

10. $F = 5x_1 - x_2 + 8x_3 + 10x_4 - 5x_5 + x_6 \rightarrow max$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_4 + x_5 - x_6 = 36 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_6 = 20 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 + x_6 = 30 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,6})$$

11. На швейній фабриці для виготовлення чотирьох видів виробів може бути використана тканина трьох артикулів. Норми витрати тканин усіх артикулів на пошиття одного виробу наведені в таблиці. Там же вказані загальна кількість тканини кожного артикулу і ціна одного виробу даного виду, що мають у розпорядженні на фабриці. Визначте, скільки виробів кожного виду повинна випускати фабрика, щоб собівартість продукції була максимальною.

Артикул тканини	Норма витрат тканини (м) на один виріб виду				Загальна кількість тканини (м)
	1	2	3	4	
I	1	--	2	1	180
II	--	1	3	2	210
III	4	2	--	4	800
Ціна одного виробу (у.о.)	9	6	4	7	

12. Для виготовлення виробів двох видів мають 100 кг металу. На виготовлення одного виробу I виду витрачається 2кг металу, а виробу II виду – 4 кг. Складіть план виробництва, який забезпечує отримання найбільшого прибутку від реалізації продукції, якщо ціна одного виробу I-го виду становить 3 у.о., а виробу II виду – 2 у.о., причому виробів I виду потрібно виготовити не більше 40, а виробів II виду – не більше 20.

13. Виробнича потужність складального цеху становить 120 виробів типу *A* і 360 виробів типу *B* за добу. Технічний контроль дозволяє проводити за добу 200 виробів того чи іншого типу. Виріб типу *A* вчетверо дорожче, ніж виріб типу *B*. Потрібно спланувати випуск готової продукції так, щоб підприємству був забезпечений максимальний прибуток.

14. Для виготовлення виробів двох видів склад може виділити не більше 80 кг металу, причому на виріб І виду витрачається 2 кг, а на виріб ІІ виду – 1 кг металу. Потрібно спланувати виробництво так, щоб був забезпечений найбільший прибуток, якщо виробів І виду потрібно виготовити не більше 30 штук, а виробів ІІ виду – не більше 40 штук, причому виріб І виду коштує 5 у.о., а ІІ виду – 3 у.о.

15. Для відгодівлі тварин вживають два види кормів; вартість 1 кг корму І виду – 5 у.о., а корму ІІ виду – 2 у.о. У кожному кілограмі корму І виду міститься 5 одиниць поживної речовини А, 2,5 одиниці поживної речовини Б і 1 одиниця поживної речовини В, а в кожному кілограмі корму ІІ виду відповідно 3; 3 і 1,3 одиниці. Яку кількість корму кожного виду необхідно витрачати щодня, щоб витрати на відгодівлю були мінімальними, якщо щоденний раціон передбачає поживних речовин типу А не менше 225 од., типу Б – не менше 150 од. і типу В – не менше 80 од.?

РОЗДІЛ 3. ДВОЇСТІ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

3.1 Пряма і двоїста задачі

Кожній задачі лінійного програмування можна зіставити іншу задачу, яка називається двоїстою або спряженою по відношенню до вихідної або прямої. Нехай задано пряму задачу лінійного програмування:

Знайти максимальне значення функції

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{3.1.1}$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \le b_k \\ a_{k+11}x_1 + a_{k+12}x_2 + \cdots + a_{k+1n}x_n = b_{k+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.1.2}$$

$$x_j \ge 0 \;\; (j = \overline{1,l},\;\; l \le n) \tag{3.1.3}$$

Означення. Задача знаходження мінімального значення функції

$$F^* = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \tag{3.1.4}$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + \cdots + a_{ml}y_m \geq c_l \\ a_{1l+1}y_1 + a_{2l+1}y_2 + \cdots + a_{ml+1}y_m = c_{l+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{1m}y_1 + a_{2m}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m = c_m \end{cases} \tag{3.1.5}$$

$$y_i \geq 0 \;\; (i = \overline{1,k},\;\; k \leq m) \tag{3.1.6}$$

називається ***двоїстою*** по відношенню до задачі (3.1.1)–(3.1.3).

Задачі (3.1.1)–(3.1.3) і (3.1.4)–(3.1.6) утворюють пару задач, яка називається в лінійному програмуванні ***двоїстою парою***.

Двоїста задача по відношенню до вихідної складається згідно з наступними правилами:

1. Цільова функція вихідної задачі задається на максимум, а цільова функція двоїстої – на мінімум;
2. Матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{3.1.7}$$

складену з коефіцієнтів при невідомих в системі обмежень (3.1.2) вихідної задачі, і аналогічну матрицю

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{3.1.8}$$

у двоїстій задачі, отримаємо одну із іншої транспонуванням.

3. Число змінних у двоїстій задачі дорівнює числу співвідношень вихідної задачі, а число обмежень двоїстої задачі – числу змінних у вихідній задачі.
4. Коефіцієнтами при невідомих у цільовій функції (3.1.4) двоїстої задачі є вільні члени в системі (3.1.2) вихідної задачі, а правими частинами в співвідношеннях (3.1.5) двоїстої задачі – коефіцієнти при невідомих у цільовій функції (3.1.1) вихідної задачі.
5. Якщо змінна вихідної задачі $x_j \geq 0$, то j -а умова в системі (3.1.5) двоїстої задачі є нерівністю виду " $\geq$ ". Якщо x_j може набувати як додатних, так і від'ємних значень, то j -е співвідношення в (3.1.5) становить собою рівняння. Аналогічні зв'язки мають місце між обмеженнями (3.1.2) вихідної задачі і змінними двоїстої задачі (3.1.4)–(3.1.6).

Приклад 1. Скласти двоїсту задачу по відношенню до задачі мінімізації функції $F = 2x_1 + x_2 + 3x_3$ за умов

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 18 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,3})$$

Розв'язання.

$F^* = 12y_1 + 24y_2 + 18y_3 \to min$ за умов

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2 \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \geq 1 \\ -5y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 3 \end{cases}$$

$$y_j \in R \ \ (j = \overline{1,3})$$

Приклад 2. Для задачі максимізації функції $F = 4x_1 + x_2 - 4x_3$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 12 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \leq 11 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,3})$$

сформулювати двоїсту задачу.

Розв'язання.

$F^* = 12y_1 + 13y_2 + 11y_3 \to min$ за умов

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 4 \\ -y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 1 \\ 4y_1 - 2y_2 - 6y_3 \geq -4 \end{cases}$$

$$y_1, y_3 \ \geq 0, \qquad y_2 \in R$$

3.2 Зв'язок між розв'язками прямої і двоїстої задач

Нехай дана вихідна задача

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max \tag{3.2.1}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1,m}) \tag{3.2.2}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}) \tag{3.2.3}$$

Тоді двоїста задача матиме вигляд:

$$F^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to min \tag{3.2.4}$$

за умов

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad (j = \overline{1,n}) \tag{3.2.5}$$

Кожна з задач двоїстої пари (3.2.1)–(3.2.3) і (3.2.4)–(3.2.6) є самостійною задачею лінійного програмування. Однак при визначенні оптимального плану симплекс-методом однієї з задач, можна знайти оптимальний план іншої задачі.

Лема 1. Якщо $X -$ деякий план вихідної задачі, а $Y -$ будь-який план двоїстої задачі, то

$$F(X) \leq F^*(Y).$$

Лема 2. Якщо $F(X^*) = F^*(Y^*)$ для деяких планів X^* і Y^* прямої та двоїстої задач, то X^* —оптимальний план вихідної задачі, а $Y^* -$ оптимальний план двоїстої задачі.

Теорема 1 (перша теорема двоїстості). Якщо одна з двоїстої пари задач має оптимальний план, то й інша має оптимальний план і $F(X^*) = F^*(Y^*)$.

Якщо ж цільова функція однієї з двоїстої пари задач не обмежена (для вихідної задачі зверху, а для двоїстої—знизу), то інша задача взагалі не має планів.

Теорема 2 (друга теорема двоїстості). План $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ вихідної задачі (3.2.1)–(3.2.3) і план $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ двоїстої задачі (3.2.4)–(3.2.5) є оптимальними планами цих задач тоді й тільки тоді, коли для будь-якого j $(j = \overline{1,n})$ виконується рівність:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i^* - c_j\right) x_j^* = 0 \tag{3.2.6}$$

Приклад 3. Для задачі визначення максимального значення функції

$F = 2x_1 + 7x_2$ за умов

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

скласти двоїсту і розв'язати обидві задачі.

Розв'язання. Двоїста задача:

$F^* = 14y_1 + 8y_2 \rightarrow min$ за умов

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 \geq 2 \\ 3y_1 + y_2 \geq 7 \end{cases}$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

Розв'яжемо задачі графічним методом.

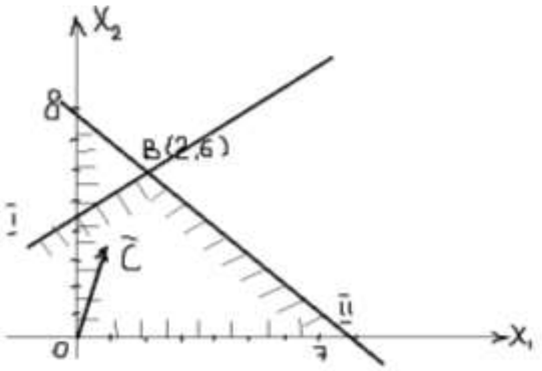

Рис.8

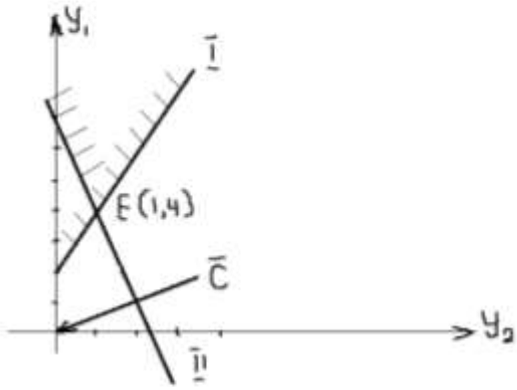

Рис.9

$F_{max} = F(2;6) = 2 \cdot 2 + 7 \cdot 6 = 46$ $\qquad$ $F^*_{min} = F(1;4) = 14 \cdot 1 + 8 \cdot 4 = 46$

З рисунків 8 та 9 видно, що значення цільової функції двоїстої задачі при будь-якому її плані не менше 46. Отже, при будь-якому плані вихідної задачі, значення цільової функції не перевищує значення цільової функції двоїстої задачі при її довільному плані.

Приклад 4. Розв'язати пару двоїстих задач.

Вихідна задача:

$F = -2x_1 - 3x_2 \to min$ за умов

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Двоїста задача:

$F^* = 4y_1 + 6y_2$ за умов

$$\begin{cases} -4y_1 + y_2 \leq -2 \\ 2y_1 + y_2 \leq -3 \end{cases}$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

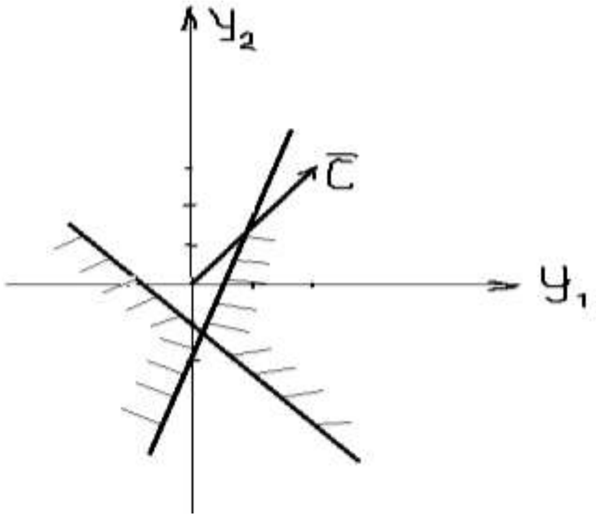

Рис. 10

З рисунку видно, що многокутник двоїстої задачі порожній, отже, вихідна задача також не має оптимального плану.

3.3 Розв'язування двоїстих задач

Припустимо, що за допомогою симплексного метода знайдено оптимальний план X^*вихідної задачі, і цей план визначається базисом з векторів $P_{i1}, P_{i2}, \ldots, P_{im}$. Позначимо $C_б = (c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{im})$ вектор-рядок, складений з коефіцієнтів у цільовій функції вихідної задачі, з такими ж індексами. P^{-1} —матриця, обернена до матриці P, складеної з компонентів векторів $P_{i1}, P_{i2}, \ldots, P_{im}$.

Теорема. Якщо основна задача лінійного програмування має оптимальний план X^*, то $Y^* = C_б P^{-1}$, є оптимальним планом двоїстої задачі.

Отже, якщо знайти симплекс-методом оптимальний план вихідної задачі (3.1.1)–(3.1.3), то, використовуючи останню симплекс-таблицю, можна визначити $C_б$ і P^{-1} і за допомогою співвідношення

$$Y^* = C_б P^{-1}$$

знайти оптимальний план двоїстої задачі (3.1.4)–(3.1.6).

У тому випадку, коли серед вихідних векторів $P_1, P_2, \ldots, P_n$ маємо m одиничних, матрицю P^{-1} утворюють числа перших m рядків останньої симплекс-таблиці, які стоять у стовпцях даних векторів. Компоненти оптимального плану двоїстої задачі Y^* збігаються з відповідними елементами $(m+1)$ рядка стовпців одиничних векторів, якщо даний коефіцієнт $C_j = 0$, і дорівнюють сумі відповідного елементу цього рядка і C_j, якщо $C_j \neq 0$.

Для симетричної пари двоїстих задач (умови задаються $\leq$ і $\geq$) компоненти оптимального плану двоїстої задачі збігаються з відповідними числами $(m+1)$ рядка останньої симплекс-таблиці і стоять у стовпцях векторів, що відповідають додатковим змінним.

Приклад 5. Для вихідної задачі

$F = x_1 + 2x_2 - x_3 \to max$ за умов

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 12 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 17 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \;\; (j = \overline{1,3})$$

скласти двоїсту і розв'язати її.

Розв'язання. Двоїста задача має вигляд:

$F^* = 12y_1 + 17y_2 + 4y_3 \to min$ за умов

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 1 \\ 4y_1 + y_2 - y_3 \ge 2 \\ -2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge -1 \end{cases}$$

$$y_1, y_2 \ge 0, \quad y_3 \in R$$

Розв'язок вихідної задачі знаходимо методом штучного базису. Він представлений у таблиці

i	базис	$C_б$	P_0	1	2	-1	0	0	$-M$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	12	-1	4	-2	1	0	0
2	P_5	0	17	1	1	2	0	1	0
3	P_6	$-M$	4	2	-1	2	0	0	1
4			0	-1	-2	1	0	0	0
5			-4	-2	1	-2	0	0	0
1	P_4	0	14	0	7/2	-1	1	0	1/2
2	P_5	0	15	0	3/2	1	0	1	$-1/2$
3	P_1	1	2	1	$-1/2$	1	0	0	1/2
4			2	0	$-5/2$	2	0	0	1/2
1	P_2	2	4	0	1	$-2/7$	2/7	0	1/7
2	P_5	0	9	0	0	13/7	$-3/7$	1	$-5/7$
3	P_1	1	2	1	0	6/7	1/7	0	4/7
4			12	0	0	9/7	5/7	0	6/7

$$X^* = (4; 4; 0; 0; 9) \;\text{ або }\; X^* = (4; 4; 0),$$

$$F_{max} = F(4; 4; 0; 0; 9) = 12,$$

$Y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*) = (\frac{5}{7}; 0; \frac{6}{7})$, елементи в останньому рядку, останньої симплекс-таблиці, у стовпчиках P_4, P_5, P_6,

$$F^*_{min} = 12y_1^* + 17y_2^* + 4y_3^* = 12 \cdot \frac{5}{7} + 17 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{6}{7} = 12.$$

Приклад 6. Для вихідної задачі

$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \to max$ за умов

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 180 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 210 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 244 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,3})$$

скласти двоїсту задачу и знайти її розв'язок.

Розв'язання. Двоїста задача наступна:

$F^* = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3 \to min$ за умов

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 10 \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 14 \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 12 \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \ \geq 0$$

Пряма і двоїста задачі утворюють пару симетричних задач. Розв'яжемо пряму задачу симплекс-методом, розв'язання надамо у таблиці

i	базис	$C_б$	P_0	10	14	12	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	180	4	2	1	1	0	0
2	P_5	0	210	3	1	3	0	1	0
3	P_6	0	244	1	2	5	0	0	1
4			0	-10	-14	-12	0	0	0
1	P_2	14	90	2	1	1/2	1/2	0	0
2	P_5	0	120	1	0	5/2	$-1/2$	1	0
3	P_6	0	64	-3	0	4	-1	0	1
4			1260	18	0	-5	7	0	0
1	P_2	14	82	9/8	1	0	5/8	0	$-1/8$
2	P_5	0	80	23/8	0	0	1/8	1	$-5/8$
3	P_3	12	16	$-3/4$	0	1	$-1/4$	0	1/4
4			1340	57/4	0	0	23/4	0	5/4

$$F_{max} = F(0; 82; 16; 0; 80; 0) = 1340$$

$$F^*_{min} = F\left(\frac{23}{4}; 0; \frac{5}{4}\right) = 180 \cdot \frac{23}{4} + 210 \cdot 0 + 244 \cdot \frac{5}{4} = 1340$$

3.4 Задачі для самостійного розв'язування

Сформулюйте двоїсті задачі по відношенню до вихідних задач та знайдіть їхні розв'язки:

1. $F = 6x_1 + 8x_2 + x_3 \to max$ за умов

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 3 \\ x_1 + 2x_2 \le 4 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

2. $F = 27x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 28x_4 \to max$ за умов

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 5 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

3. $F = 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 \to max$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 18 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 24 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 \le 36 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1,3})$$

4. $F = 3x_1 - 7x_2 - 4x_3 \to min$ за умов

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \le 12 \\ -4x_1 - 4x_2 - 3x_3 \le 24 \\ 5x_1 + 5x_2 + 23 \le 15 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1,3})$$

5. $F = x_1 + 3x_2 - 5x_4 \to max$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28 \\ -3x_1 + 5x_2 \quad\quad - 3x_4 \le 30 \\ 4x_1 - 2x_2 \quad\quad + 8x_4 \le 32 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1,4})$$

6. $F = 3x_1 + 2x_5 - 5x_6 \to max$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_5 + 5x_6 = 30 \\ 4x_1 + x_3 + 2x_5 - 4x_6 = 28 \\ -3x_1 + x_4 - 3x_5 + 6x_6 = 24 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1,6})$$

7-21. Сформулюйте двоїсті задачі по відношенню до задач 6–20 із підрозділу 1.4 та знайдіть їхні розв'язки.

Рекомендована література

1. Костарук В.М. Векторні простори і розв’язування задач лінійного програмування / В.М.Костарук, Л.М. Вивальнюк - К. : Радянська школа, 1972. – 208 с.
2. Ляшенко И.Н. Линейное и нелинейное программирование: Учеб. пособие / И.Н. Ляшенко, Е.А. Карагодова, Н.В. Черникова, Н.З.Шор. – К. : Вища школа, 1975. – 372 с.
3. Григорків В.С. Практикум з математичного програмування: Навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей вузів / В.С. Григорків, М.В.Бойчук. – Чернівці : Прут, 1995. - 244 с.
4. Українець А.І. Задачі лінійного та нелінійного програмування: навч. посібник / А.І. Українець, А.М. Гуржій, В.В. Самсонов та ін. - К.:НУХТ, 2007. – 208 с.
5. Ємець О.О. Лінійне програмування: Навчальний посібник для студентів напрямів підготовки 122 Комп’ютерні науки та 121 Інженерія програмного забезпечення / О.О. Ємець, О.С. Пічугіна, К.П. Коробчинський. - Х.:ХНАДУ, 2019. - 102 с.

Зміст