

УДК621.86.06

Чаюн І.М., д.т.н., Чаюн М.І., Непомнящий О.В., аспірант

## ВПЛИВ МІЖЕЛЕМЕНТНОГО ТЕРТЯ В КАНАТІ НА ЙОГО ДЕФОРМОВАНІЙ СТАН І ЖОРСТКІСНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРИ РОЗТЯГАННІ ТА КРУЧЕННІ

**Постановка проблеми.** Фундаментом сучасного рівня досліджень деформовано-напруженого стану канатів і кабель-канатів являються роботи проф. М.Ф. Глушко [1], котрими закладено основи будівельної механіки канату. Більше 50 років багато хто із дослідників в своїх роботах [2...5] використовують диференціальні рівняння статички канату [1]

$$\left. \begin{aligned} A \frac{du}{dx} + C \frac{dv}{dx} &= P(x); \\ C \frac{du}{dx} + B \frac{dv}{dx} &= M(x), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

де  $u$  і  $v$  – подовжні і кутові переміщення плоских перерізів канату;  $du/dx = \varepsilon$  і  $dv/dx = \theta$  – подовжні і кутові деформації канату;

$P(x)$  і  $M(x)$  – осьове зусилля і крутний момент в поперечному перерізі канату;  $x$  – координата перерізу вздовж його осі (рис.1);  $A$ ,  $B$  і  $C$  – по термінології М.Ф. Глушко: узагальнені коефіцієнти жорсткості канату.

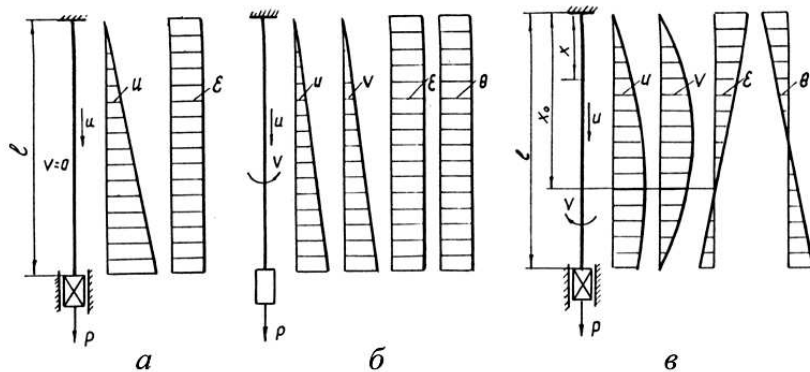


Рисунок 1 – Схеми розтягання прямого канату:

- а) вантажем в напрямних; б) вільно підвішеним вантажем;  
в) вантаж в напрямних з урахуванням власної ваги канату

Система (1) базується на рівняннях статички Кірхгофа для тонких стержнів, а безпосередньо в основі одержання виразів коефіцієнтів жорсткості  $A$ ,  $B$  і  $C$  лежить рішення системи трьох рівнянь методу сил для одної дротини з послідуочим підсумуванням і

узагальненням для канату в цілому як одинарного (спіральних), так і подвійного звивання.

Але в конструктивному відношенні канат це сукупність дротин спіральної форми, які контактують між собою, що, звичайно, обумовлює взаємодію, пов'язану з тертям. Отже вплив тертя між елементами на деформований стан і жорсткості  $A, B, C$  в [1] не враховується. Слід зазначити, що в постановці задачі введена розподілена контактна сила, але далі в підсумку зроблено висновок [1, стр.71]: «...ввиду совместности упругих смещений слоев проволоки несмотря на контактное давление между ними силы трения не реализуются», який здається помилковим.

**Аналіз публікацій за темою статті.** Вирішенням системи рівнянь (1) [1] є деформації  $\varepsilon$  розтягання і  $\theta$  кручення канату від дії сили  $P(x) = Q + p(l - x)$  і реакції напрямних  $M = C(Q + 0,5pL) / A$ , де  $Q$  – вага вантажу;  $p$  – вага одиничної довжини  $L$  канату.

В разі вільного підвісу вантажу

$$\varepsilon = \frac{B}{AB - C^2} P(x) = \frac{B}{\Delta} P(x); \quad \theta = -\frac{C}{\Delta} P(x). \quad (2)$$

При вантажу в напрямних

$$\varepsilon = \frac{Q + 0,5pL}{A} + 0,5p(L - 2x) \frac{B}{\Delta}; \quad \theta = -0,5p(L - 2x) \frac{C}{\Delta}. \quad (3)$$

Кут повороту перерізів канату

$$V(x) = -0,5p(L - 2x) \frac{C}{\Delta} x. \quad (4)$$

Кручення канату вносить значний дисонанс в подовжніх деформаціях дротів контактуючих шарів. При цьому контактний тиск між шарами і різниця між пружними подовжніми деформаціями і недеформативними переміщеннями дротин дають можливість виникненню сил тертя ковзання.

В роботі [3] наведена історія досліджень явища кручення канатів. Початок поклали співробітники голландської науково-дослідної станції [6]. Вимірювання деформації кручення були проведені ФРГ [7]. Формула кутового переміщення в дещо іншому вигляді була рекомендована французьким горно промисловим товариством [8]

$$V(x) = -0,5 \frac{K}{H} p(L - x)x, \quad (5)$$

де  $K = C/A$  – представляє крутний момент в перерізі при чистому розтяганні канату;

$H = B - C^2/A$  – жорсткість при вільному крученні.

В роботі [3] відмічається, що наведені формули можна було б без застережень використовувати в практичних розрахунках за умови на дійного визначення жорсткісних характеристик  $A, B, C$  канату. Така ж думка і автора роботи [9]. Причиною ненадійності жорсткостей  $A, B, C$  автори [3,9] вважають неврахування силової взаємодії між дротами в процесі деформування канату. Взаємодія є не що інше як тертя. Вимоги точного визначення жорсткісних характеристик канатів пред'являються як при одноканатному, так і особливо при багатоканатному підйомі [10].

**Мета роботи** полягає в обґрунтуванні механіко-математичної моделі тертя на жорсткісні характеристики канатів при розтяганні з крученням та дослідження його впливу на їх деформований стан.

**Основний матеріал дослідження.** У визначенні жорсткісних характеристик канатів і взагалі виробів з витих дротів є два напрямки. Перший — це зазначена вище теорія М.Ф. Глушко [1], яка базується на теоремі Кастеліано і методі сил. Другий напрямок, представлений в [5]. Базується на методі переміщень і теоремі, яка цілеспрямовано визначає жорсткості перерізу канату [5]: *друга частинна похідна від питомої потенційної енергії деформування канату по тій чи іншій деформації визначає відповідну жорсткість перерізу канату*. Слід зазначити, що в роботах, які базуються на [1] є невідповідність в термінології. Там також визначаються і використовуються не жорсткості канату, а жорсткості його перерізу. Аналогічна невідповідність використання термінології зустрічається і в підручниках з опору матеріалів. Наприклад, стосовно стержня при розтяганні: добуток  $EA$  модуля пружності матеріалу стержня і площі його поперечного перерізу — це жорсткість перерізу стержня на розтягання, часто називають «жорсткістю стержня», хоча відомо, що «жорсткість стержня» — це  $EA/\ell$ , тобто відношення жорсткості перерізу стержня до його довжини. Теж ж саме відносно усіх інших п'яти жорсткостей перерізу стержня.

Питома потенційна енергія пружного деформування канату, тобто одиничної його довжини [5]:

$$u = \frac{1}{2} \sum_1^s \frac{m}{\Lambda} (\Phi_p e^2 + \Phi_t t^2 + \Phi_u (b^2 + n^2)), \quad (6)$$

де  $s$  — число елементів канату: рівноцінних в геометричному, фізичному і силовому відношенні груп дротів;  $m$  — число дротин в одній групі;  $1/\cos \alpha \cos \beta$ ;  $\alpha$  і  $\beta$  — кути звивання дротів в сталки і сталок в канат;  $\Phi_p = EA$ ,  $\Phi_t = 2GI$  і  $\Phi_u = EI$  — жорсткості перерізу дротин на розтягання, кручення і згинання;  $e, t$  і  $b, n$  — деформації дротин розтягання, кручення і згинання.

Для зручності подальших викладок щодо урахування міжелементного тертя деформації дротин спірального канату представимо в одноманітній компактній формі:

$$e = \varepsilon K_{e\varepsilon} + \theta K_{e\theta} = e(\varepsilon) \pm e(\theta) \tag{7}$$

$$t = \varepsilon K_{t\varepsilon} + \theta K_{t\theta} = t(\varepsilon) + t(\theta); \tag{8}$$

$$b = \varepsilon K_{b\varepsilon} + \theta K_{b\theta} = b(\varepsilon) \pm b(\theta), \tag{9}$$

де  $\varepsilon$  і  $\theta$  – відповідно деформації канату розтягання і кручення;

$K_{e\varepsilon}; K_{e\theta}; \dots; K_{b\theta}$  – питомі деформації дротин, пов’язані з деформаціями канату (принцип їх індексації: перший знак вказує вид деформації дротини, а другий причину, тобто деформацію канату, яка викликає дану деформацію дротини, наприклад,  $K_{e\varepsilon}$  – питома подовжня деформація  $e$  дротини, пов’язана з деформацією розтягання  $\varepsilon$  канату;  $K_{b\theta}$  – питома деформація згинання  $b$  дротини відносно біномалі, пов’язана з деформацією кручення  $\theta$  канату.

Вирази питомих деформацій базуються на геометричних рівняннях [1] і врахуванні поперечних деформацій, пов’язаних з ефектом Пуассона згідно з [5], а також з доданням впливу фактора тертя:

$$K_{e\varepsilon} = \cos^2 \alpha (1 - v_{e\theta} \mu_\varepsilon \operatorname{tg}^2 \alpha); \tag{10}$$

$$K_{e\theta} = v_{e\theta} \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha (r + \mu_\theta \operatorname{tg} \alpha); \tag{11}$$

$$K_{t\varepsilon} = (1 - v_{t\varepsilon} \mu_\varepsilon) r^{-1} \cos \alpha \sin^2 \alpha; \tag{12}$$

$$K_{t\theta} = v_{t\theta} \cos^4 \alpha (1 + \mu_\theta \operatorname{tg}^3 \alpha / r); \tag{13}$$

$$K_{b\theta} = v_{b\theta} \sin 2\alpha (1 + \cos^2 \alpha), \tag{15}$$

де  $v_{e\theta}, v_{e\theta}, v_{t\varepsilon}, v_{t\theta}, v_{b\varepsilon}, v_{b\theta}$  – коефіцієнти впливу тертя;  $\mu_\varepsilon$  і  $\mu_\theta$  – коефіцієнти поперечної деформації шарів канату [5].

Найбільш суттєво тертя проявляється при вільному розтяганні канату на подовжній (7) і крутній (8) деформаціях елементів.

В описанні механічної моделі врахування тертя між елементами канату використаємо загальну класичну схему теорії тертя ковзання, концепцію згідно з [11], а також поняття аналогічне принципу суперпозиції (принципу незалежності дії сил).

*Питома деформація  $K_{e\theta}$ , пов’язана з деформацією кручення  $\theta$  канату і подовжньою деформацією  $e(\theta)$  дротини (11)*

$$K_{e\theta} = 0,5 v_{e\theta} \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha (r + \mu_\theta \operatorname{tg} \alpha).$$

За умови відсутності тертя для дротів шару, який розкручується, складова  $\theta K_{e\theta}$  в виразі (7) є від’ємною і не представляє подовжню деформацію  $e(\theta)$ , а буде повністю відносним недеформативним переміщенням  $\max c(\theta) = |\theta K_{e\theta}|$  (рис.2).

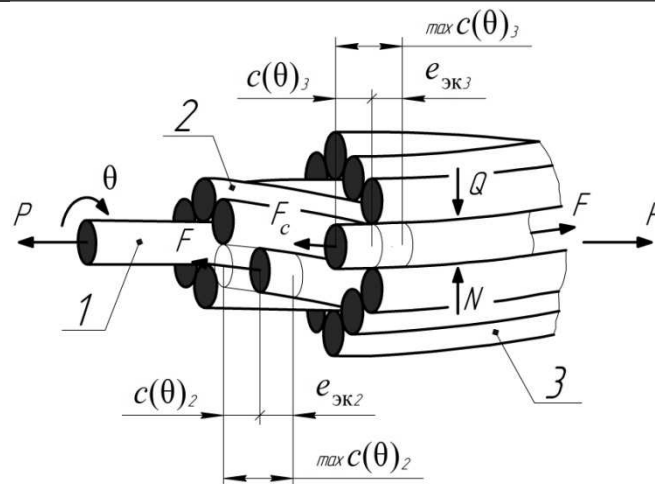


Рисунок 2– Модель міжелементного тертя між дротами в канаті при розтяганні з крученням

Керуючись принципом суперпозиції це переміщення можна уявити відокремлено від деформації. Візуально для зовнішнього шару, який розкручується, це уявляється висовуванням всіх дротин даного шару з поперечного перерізу канату на величину  $\max c(\theta)_3 = |\theta K_{e\theta_3}|$ , а для дротів шару, який закручується, можна уявити зворотним напрямком, тобто всовуванням в переріз на  $\max c(\theta)_2 = |\theta K_{e\theta_2}|$  (на рис.2 зазначена механіка показана для одної дротини, але вона відноситься до дротів усього шару).

Наявність тертя створює опір переміщенню  $\max c(\theta)_3$  в 3-му і  $\max c(\theta)_2$  в 2-му шарах. Дротини отримують подовжні деформації  $e(\theta)_3$  і  $e(\theta)_2$  до настання стану тертя руху в відповідності з умовою  $F_c \geq F$ ,

де  $F_c$  – зсувна сила, причиною якої є деформацією кручення канату (рис. 2);  $F$ – сила тертя між шарами дротів, яка створюється силою  $N$  притискання шарів, пов'язаного з розтягання канату зусиллям  $P$ .

За умови  $F_c \leq F$  в межах пружного деформування між елементами буде тертя спокою. Саме тільки до такої ситуації відноситься висновок М.Ф. Глушко [4, стор.71], наведений вище.

За умови  $F_c \geq F$  припиняється деформування дротини, а буде відносно переміщення  $c(\theta) = |\theta K_{e\theta} - e(\theta)|$ . Ця механіка забезпечується коефіцієнтом

$$v_{e\theta} = \frac{c(\theta)}{\max c(\theta)} = \frac{e_m - e_{ек}}{\max c(\theta)}; v_{e\theta} = \begin{cases} 1 - \text{без врахування тертя;} \\ 0 - \text{в стані тертя спокою,} \end{cases} \quad (16)$$

де  $c(\theta)$  – інтенсивність недеформативного подовжнього переміщення дротини, пов’язаного з деформацією кручення канату і тертям;  $\max c(\theta)$  – максимально можлива інтенсивність недеформативного подовжнього переміщення дротини від деформації кручення канату тобто за відсутністю тертя;  $e_m$  – теоретичне значення подовжньої деформації дротини при вільному розтяганні канату без врахування тертя тобто при  $v_{e\theta} = 1$ ;  $e_{ек}$  – дійсна деформація.

На основі (16) з урахуванням (7), (10), (11)

$$v_{e\theta} = \left| \frac{\cos^2 \alpha (\varepsilon (1 - \mu_\varepsilon \operatorname{tg}^2 \alpha) + \theta (r - \mu_\theta \operatorname{tg} \alpha) \operatorname{tg} \alpha) - e_{ек}}{\theta (r - \mu_\theta \operatorname{tg} \alpha) \cos \alpha \sin \alpha} \right|. \quad (17)$$

Питома деформація  $K_{t\theta}$ , пов’язана з деформацією кручення  $\theta$  канату і деформацією кручення  $t$  дротини (13)

$$K_{t\theta} = v_{t\theta} \cos^4 \alpha (1 + \mu_\theta \operatorname{tg}^3 \alpha / r).$$

Уявимо суцільний стержень з канатною формою перерізу. Питома деформація  $K_{t\theta} = 1$ , а усі останні питомі деформації нульові. Його крутна жорсткість відповідає стану тертя спокою між дротинами

$$G_{\theta\theta} = \sum \Phi_t K_{t\theta} = \sum G J_{01}, \quad (18)$$

де  $J_{01}$  – полярний момент інерції перерізу дротини відносно центру перерізу канату (рис.3)

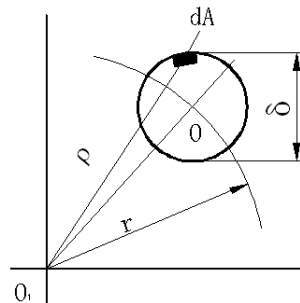


Рисунок 3 – До визначення коефіцієнта  $v_{t\theta}$

$$J_{01} = \frac{\pi \delta^4}{32} \sqrt{1 + 8\kappa \left(\frac{r}{\delta}\right)^2}. \quad (19)$$

В реальному стані тертя руху для спірального канату  $K_{t\theta}$  визначається виразом (14), а коефіцієнт, що враховує вплив тертя

$$v_{t\theta} = (1 + 8\kappa(r/\delta)^2)^{0.5}, \kappa = \begin{cases} 1 - \text{без врахування тертя;} \\ 0 - \text{в стані тертя спокою.} \end{cases} \quad (20)$$

Аналогічно механіка впливу тертя спокою і руху відображається коефіцієнтами  $v_{e\omega}$ ,  $v_{b\epsilon}$ ,  $v_{b\theta}$ . Тільки вплив тертя, пов'язаний з ними, набагато менший. Коефіцієнт тертя, пов'язаний з поперечною деформацією

$$v_{e\omega} = \frac{c(\omega)}{\max c(\omega)} = \frac{\max c(\omega) - e_{ек}}{\max c(\omega)} = 1 - \frac{e_{ек}}{\omega \sin^2 \alpha}, \quad (21)$$

де  $c(\omega)$  – інтенсивність недеформативного подовжнього переміщення дротини, пов'язаного з поперечною деформацією кручення канату і тертям;  $\max c(\omega)$  – його максимально можливе значення тобто за відсутністю тертя;  $e_{ек}$  – дійсна експериментально визначена деформація.

Жорсткісні характеристики визначаються названою вище теоремою [5]

$$G_{kk} = \frac{\partial^2 u}{\partial \Delta_{kk}}; G_{kj} = \frac{\partial^2 u}{\partial \Delta_k \partial \Delta_j}; \quad k = j = 1, 2, \quad (22)$$

де  $\Delta$  – деформації канату:  $\Delta_1 = \epsilon$  – подовжня;  $\Delta_2 = \theta$  – крутна.

Використовуючи вирази (6)...(15), які описують внутрішній деформований стан спірального канату, на основі (22) з урахуванням (6)...(15) основні жорсткості перерізу канату подовжня і крутна

$$G_{11} = \sum_1^s \Lambda (\Phi_p K_{e\epsilon}^2 + \Phi_t K_{t\epsilon}^2 + \Phi_u K_{b\epsilon}^2); \quad (23)$$

$$G_{22} = \sum_1^s \Lambda (\Phi_p K_{e\theta}^2 + \Phi_t K_{t\theta}^2 + \Phi_u K_{b\theta}^2) \quad (24)$$

та жорсткості впливу подовжньо-крутна і крутильно-подовжня

$$G_{12} = G_{21} = \sum_1^s \Lambda (\Phi_p K_{e\epsilon} K_{e\theta} + \Phi_t K_{t\epsilon} K_{t\theta} + \Phi_u K_{b\epsilon} K_{b\theta}). \quad (25)$$

Коефіцієнти впливу тертя  $v_{e\theta}$ ,  $v_{e\omega}$  можна визначити безпосередньо експериментально за методикою аналогічною [12]. Опосередковано експериментальну перевірку даної моделі врахування тертя можна виконати на основі аналізу зовнішнього деформованого стану.

В роботі [1] запропоновано параметр  $\psi = C/\max C$ , який характеризує розкручуваність канату при вільному розтяганні (стосовно даної роботи  $\psi = G_{12}/\max G_{12}$ ), де  $G_{12}$  і  $\max C_{\max}$  –

подовжньо-крутні жорсткості при дійсних напрямках звивання шарів дротів і при однаковому напрямку звивання усіх шарів.

В роботі [5] показано, що при  $\psi \leq 0,2 \dots 0,3$  для спіральних канатів їх несуча спроможність при вільному розтяганні така ж сама як і при розтяганні в напрямних, тобто вони не розкручуються. Розрахунки показують, що причиною нульової деформації кручення є міжелементне тертя. Так, для канату  $1/1,3-6/1,2-6(6/1,0-6/1,3)+18$  (в чисельниках кількість дротів в шарах; в знаменниках їх діаметри; кути звивання:  $\alpha_1 = 0^\circ$ ;  $\alpha_2 = 8,67^\circ$ ;  $\alpha_3 = \alpha_4 = 16^\circ$ ; діаметр канату  $7,9\text{мм}$ ; модулі пружності дротів  $E = 2 \cdot 10^5 \text{МПа}$ ;  $G = 0,4E$ . Жорсткості перерізу канату без врахування тертя:  $G_{11} = 6306\text{кН}$ ;  $G_{22} = 4475\text{кНмм}^2$ ;  $G_{12} = 1334\text{кНмм}$  (майже не відрізняються від  $A, B, C$  за формулами роботи [1]). При силі  $P=30\text{кН}$  теоретичне значення деформації кручення канату (розкручування) за формулою (2):  $\theta = -1,5 \text{ рад/м}$ .

З урахуванням існуючого тертя жорсткості  $G_{22}$  і  $G_{12}$  суттєво змінюються. Так, при коефіцієнтах впливу тертя  $v_{e0} \dots v_{b0}$  в інтервалах  $0,9/0,47 \dots 0,9/0,50$  (в чисельниках для зовнішнього шару, а в знаменниках для внутрішніх шарів) і при компонентах  $k=0,1/0,2$  для коефіцієнта  $v_{r0}$  інтервал теоретичних значень  $G_{22}$  склав  $4817 \dots 4904\text{кНмм}^2$ , а жорсткість  $G_{12}$  змінюється від від'ємного значення  $-47,7$  до  $39,4$  тобто проходить через нуль. Через нуль проходить і деформація кручення канату, змінюючись від  $\theta = 0,045 \text{ рад/м}$  в бік закручування зовнішнього шару до розкручування на  $\theta = -0,0361 \text{ рад/м}$ . В зазначених інтервалах зміни коефіцієнтів тертя жорсткості  $G_{12}$  і деформація  $\theta$  змінюють знак декілька разів, проходячи через нульову деформацію, що відповідає експериментальним даним кручення канату. Як видно в даному прикладі розрахункове значення деформації кручення канату при врахуванні тертя ковзання на порядок менше в порівнянні з теорією, в якій тертя не враховується.

### Висновк.

До відомої розрахункової схеми будівельної механіки канату [1], в якій не враховується міжелементне тертя при деформуванні канату розтяганням і крученням, введено тертя. Механіка дії тертя тут полягає в тому, що створюється опір недеформативному зміщенню дротів при розтяганні канату з крученням. Такий опір продовжується допоки тертя спокою переходить в тертя руху. Границя між двома стадіями тертя регулюється введеними в комплекс виразів пружних деформацій дротів в канаті експериментальними коефіцієнтами. Теоретичний інтервал зміни таких коефіцієнтів від 0 (стан тертя спокою) до 1 (відсутність тертя). На основі таких виразів деформацій



дротів складається питома потенційна енергія деформування канату і визначається увесь комплекс його жорсткісних характеристик. Врахування тертя суттєво підвищує точність їх визначення, а отже і розрахунків на жорсткість підйомних канатів і канатних конструкцій.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Глушко М.Ф. Стальные подъемные канаты — К.: Техніка, 1966.— 325 с.
2. Сергеев С. Т. Стальные канаты — К.: Техніка.— 1974,— 325 с.
3. Бережинский В.И. О кручении отеса проволоченого каната// Стальные канаты. Вып.9. — Одесса: Астропринт, 2013. — С. 116 — 125.
4. Малиновский В.А. Стальные канаты — Одесса: Астропринт. 2001.— 187 с.
5. Чаюн, И.М. Несущая способность подъемных канатов и лент — Одесса: Астропринт, 2003. — 233 с.
6. Hermes J.M., Bruens F.P. De Tozsevwisselingen in ennietdrallvrijekabelvan en jphalinsallatie. GtologietnMijnbouw, No. 11, Band. 19, 1957.
7. Greis F. Erkenntnisse über die Lebensdauer von Schachtförderseilen des Ruhrgebietes im Laufe der letzten 25 Jahren. « Bergakademie », Nr.7, 1958.
8. Pichot G. Cables d'extraction. Revue de l'Industrie Minerale, Document S.I.M., K 1, № special, 1959.
9. Флоринский Ф.В. К вопросу определения параметров уравнений упругих продольно-крутильных колебаний проволочных канатов // Стальные канаты. — К.: Техніка, 1965.— Вып.2. С. 21 — 30.
10. Нестеров П.П. Исследование характеристик канатов различных конструкций применительно к многоканатному подъему // Многоканатный подъем. — М.: Углетехиздат, 1958.— С. 80 — 99.
11. Чаюн М.И., Чаюн, И.М. Концепция учета трения между элементами канату // Стальные канаты. Вып.6. — Одесса: Астропринт, 2008. — С. 24 — 37.
12. Никитин И.Ф. Распределение напряжений в канате при пробегании его по блоку // Стальные канаты. — К.: Техніка, 1966.— Вып. 3. С. 130 — 139.