

УДК 62-50

С. А. Бобриков, Е. Д. Пичугин, кандидаты техн. наук

### ЦИФРОВОЙ РЕГУЛЯТОР В СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ С АСТАТИЗМОМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**Аннотация.** Рассмотрен метод расчета цифрового регулятора в системе управления с астатизмом второго порядка. Показателями качества системы выбраны максимальная скорость изменения выходного сигнала и максимальное перерегулирование. Динамические свойства системы полностью определяются постоянной времени дифференциальной составляющей числителя передаточной функции разомкнутой системы. Определена зависимость между постоянной времени и показателями качества системы.

**Ключевые слова:** система управления, показатели качества, передаточные функции, преобразование передаточной функции, переходная характеристика, преобразование Лапласа, квантование сигнала, шаг квантования

S. A. Bobrikov, PhD., E. D. Pichugin, PhD.

### DIGITAL REGULATOR IN CONTROL SECOND ORDER ASTATISM SYSTEM

**Abstract.** The method of digital regulator calculation is considered in control second order of astatism system. The indexes of the system quality are high speed of change of output signal and maximal over regulation. Run-time properties of the system are fully determined with a permanent to time differential constituent of numerator of transmission function of the broken a secret system. The dependence between the time constant and quality indicators system was determined.

**Keywords:** control system, indexes of quality, transmission functions, transformation of transmission function, transitional description, transformation of Laplace, quantum of signal, step of quantum

С. А. Бобриков, Е. Д. Пичугин, кандидаты техн. наук

### ЦИФРОВОЙ РЕГУЛЯТОР В СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ З АСТАТИЗМОМ ДРУГОГО ПОРЯДКА

**Анотація.** Розглянуто метод розрахунку цифрового регулятора в системі управління з астатизмом другого порядку. Показниками якості системи вибрані максимальна швидкість зміни вихідного сигналу і максимальне перерегулювання. Динамічні властивості системи повністю визначаються сталою часу диференційної складової чисельника передавальної функції розімкненої системи. Визначена залежність між сталою часу і показниками якості системи.

**Ключові слова:** система управління, показники якості, передавальна функція, перетворення передавальної функції, перехідна характеристика, перетворення Лапласа, квантування сигналу, крок квантування

**Введение.** Как известно, в системах с астатизмом второго порядка в установившемся режиме ошибка управления при постоянном входном сигнале, а также при изменении входного сигнала с постоянной скоростью равна нулю. Кроме того, равен нулю интеграл от ошибки за время переходного процесса [1, 2]. Эти свойства позволяют строить системы, в которых статическая и скоростная ошибки равны нулю, а также равна нулю ошибка, накопленная за время переходного процесса (высокоточные следящие системы, измерительные системы и т.д.).

Если заданная часть системы не обладает интегрирующими свойствами, то получить астатизм второго порядка при использовании стандартного ПИД-регулятора не-

возможно. Задача получения системы с астатизмом второго порядка при условии, что заданная часть системы описывается уравнением любого порядка и не обладает интегрирующими свойствами, может быть решена, если использовать цифровое управляющее устройство с соответствующим программным обеспечением.

**Цель работы.** В данной статье рассмотрен метод расчета цифрового регулятора для системы с астатизмом второго порядка, отличающийся простотой и не требующий проведения сложных расчетов при разработке системы. Метод позволяет рассчитать цифровой регулятор для системы, заданная часть которой имеет произвольный порядок. Особенностью рассматриваемого метода является то, что полученная на первом этапе расчета непрерывная передаточная функция

© Бобриков С.А., Пичугин Е.Д., 2013

регулятора далее преобразуется в адекватную ей дискретную передаточную функцию.

**Содержание работы.** Рассмотренный метод основан на том, что передаточная функция разомкнутой системы, представляемой как последовательно включенные регулятор и заданная часть, имеет вид (рис. 1)

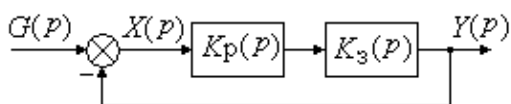


Рис. 1. Структурная схема САУ

$$K_c(p) = K_p(p)K_z(p) = \frac{Tp+1}{\tau^2 p^2} = \frac{Y(p)}{X(p)}, \quad (1)$$

где  $K_p(p)$  – передаточная функция регулятора,  $K_z(p)$  – передаточная функция заданной части системы,  $\tau = 1$  с – масштабный коэффициент, введенный для соблюдения размерностей всех составляющих выражения (1).

При таком виде передаточной функции системы её качество полностью определяется одним параметром  $T$ . Рассматриваемый метод позволяет определить то значение  $T$ , при котором система по своим динамическим свойствам отвечает требуемым показателям качества. Показателями качества системы приняты: максимальное перерегулирование  $\sigma_{\max}$  в переходной характеристике и максимальная скорость изменения выходной величины  $\dot{y}(t) = v(t)$  [7]. При расчете системы принимают один из указанных показателей качества, как основной:

1) максимальное перерегулирование в переходной характеристике не должно превышать заданного уровня;

2) максимальная скорость изменения выходного сигнала при подаче на вход ступенчатого сигнала максимального уровня  $g(t) = g_{\max} \times 1(t)$  не должна превышать заданного значения  $v_{\max}$ .

Для определения максимальной скорости выходного сигнала при ступенчатом входном воздействии определим зависимость скорости изменения выходного сигнала от параметра  $T$ . Передаточная функция замкнутой системы (рис. 1)

$$W(p) = \frac{Tp+1}{\tau^2 p^2 + Tp+1} = \frac{Y(p)}{G(p)}.$$

При ступенчатом входном сигнале  $g(t) = g_c \times 1(t)$  ( $g_c = \text{const}$ ) изображение выходной величины

$$Y(p) = \frac{g_c(Tp+1)}{p(\tau^2 p^2 + Tp+1)}.$$

Найдем изображение Лапласа для производной выходной величины:

$$L\{\dot{y}(t)\} = pY(p) - y(0) = \frac{g_c(Tp+1)}{\tau^2 p^2 + Tp+1},$$

где  $y(0)=0$  – начальное значение переходной характеристики.

Используя теорему о связи между начальным значением оригинала и его изображением, определим начальное значение производной от переходной характеристики:

$$\dot{y}(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pL\{\dot{y}(t)\} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{pg_c(Tp+1)}{\tau^2 p^2 + Tp+1} = g_c T \tau^{-2}. \quad (\tau = 1 \text{ с}).$$

Для определения связи между максимальным и начальным значениями скорости изменения выходной величины было проведено моделирование системы в пакете MATLAB–Simulink [6]. Схема модели приведена на рис. 2. При моделировании были получены переходные характеристики для разных значений  $T$  и  $g_c$ . При этом определялись максимальное перерегулирование  $\sigma_{\max}$ , начальная скорость  $v_0$  и максимальная скорость  $v_{\max}$  выходной величины. Результаты моделирования приведены на рис. 3. Экспериментально установлено, что при  $T \geq 1$  максимальное значение скорости изменения выходного сигнала равно начальному значению:  $v_{\max} = v_0 = g_c T \tau^{-2}$ . Из этого следует, что задавшись максимальным значением входного ступенчатого сигнала  $g_{\max}$  и максимальным допустимым значением скорости изменения выходной величины  $v_{\max}$ , можно определить соответствующее значение  $T$ :

$$T = \frac{v_{\max} \tau^2}{g_{\max}} = \frac{v_{\max}}{g_{\max}}$$

Для принятого значения  $T$  по графику 1 (рис. 3) можно определить величину максимального перерегулирования  $\sigma_{\max}$ .

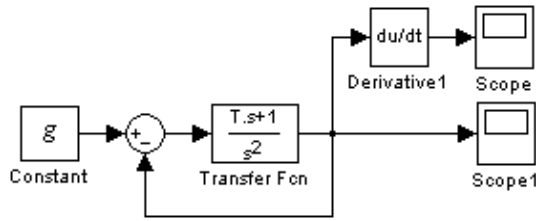


Рис. 2. Схема модели в системе MATLAB-Simulink

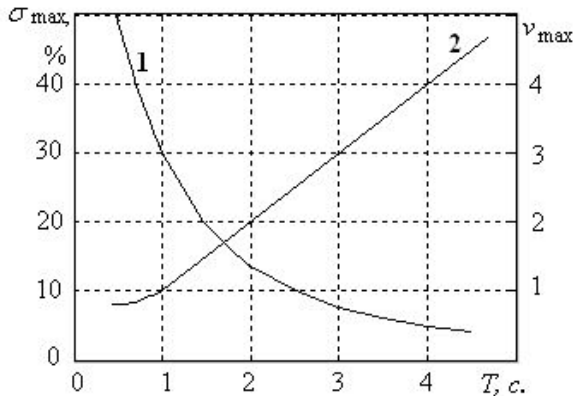


Рис. 3. Зависимости максимального перерегулирования  $\sigma_{\max}$  (1) переходной характеристики и максимальной скорости выходной величины  $v_{\max}$  (2) от параметра  $T$

При известной передаточной функции заданной части системы передаточная функция аналогового регулятора

$$K_p(p) = \frac{K_c(p)}{K_3(p)} = \frac{(Tp+1)}{p^2 K_3(p)}$$

Для реализации регулятора в цифровой форме определим его дискретную передаточную функцию путем подстановки в аналоговую передаточную функцию [1, 2]:

$$P = \frac{2(z-1)}{T_0(z+1)}, \quad (2)$$

где  $T_0$  – шаг квантования непрерывного сигнала в дискретный.

Чтобы цифровая система управления максимально соответствовала исходной непрерывной, шаг квантования следует принять, пользуясь условием  $T_0 \leq 0,1T_{\min}$ , где  $T_{\min}$  – наименьшая постоянная времени непрерывной системы [4, 5, 9].

*Пример.* Пусть заданная часть системы имеет передаточную функцию

$$K_3(p) = \frac{0,5}{(0,2p+1)(0,5p+1)}$$

Принимаем условие: максимальная допустимая скорость изменения выходной величины при единичном ступенчатом входном сигнале равна 1,5 (в относительных единицах). При этом

$$T = \frac{1,5}{1} = 1,5 \text{ с}, \quad K_c(p) = \frac{1,5p+1}{p^2}$$

Передаточная функция аналогового регулятора принимает вид

$$K_p(p) = \frac{K_c(p)}{K_3(p)} = \frac{(1,5p+1)(0,2p+1)(0,5p+1)}{0,5p^2}$$

С такой передаточной функцией регулятор не может быть реализован: степень полинома числителя не может быть больше степени полинома знаменателя. Для реализуемости регулятора в знаменатель вводим дополнительную постоянную времени  $T_d$ . Для того, чтобы свойства системы не изменились, дополнительная постоянная времени должна быть на порядок меньше наименьшей постоянной времени заданной части системы [9].

Окончательно принимаем передаточную функцию регулятора в аналоговой форме в виде

$$K_p(p) = \frac{2(1,5p+1)(0,2p+1)(0,5p+1)}{p^2(0,02p+1)} \quad (3)$$

Для получения дискретной передаточной функции цифрового регулятора в передаточную функцию (3) делаем подстановку (2). Полученная при этом дискретная передаточная функция регулятора имеет вид

$$K_p(z) = \frac{s_3 z^3 + s_2 z^2 + s_1 z + s_0}{g_3 z^3 + g_2 z^2 + g_1 z + g_0}$$

где  $s_0 = -2,38163518$ ;  $s_1 = 7,18156485$ ;  $s_2 = -7,21836475$ ;  $s_3 = 2,41843522$ ;  $g_0 = -0,152$ ;  $g_1 = 0,472$ ;  $g_2 = -0,488$ ;  $g_3 = 0,168$ .

Шаг квантования принят  $T_0 = 0,002$  с.

Для проверки правильности определения передаточной функции регулятора проведено моделирование системы с цифровым регулятором. Схема модели показана на рис. 4. Результат моделирования приведен на рис. 5. График 2 свидетельствует, что максимальная величина производной не превышает заданного значения – 1,5. Величина перерегулирования (график 1 на рис. 5) равна примерно 20 %, что хорошо согласуется с графиком 1 на рис.3.

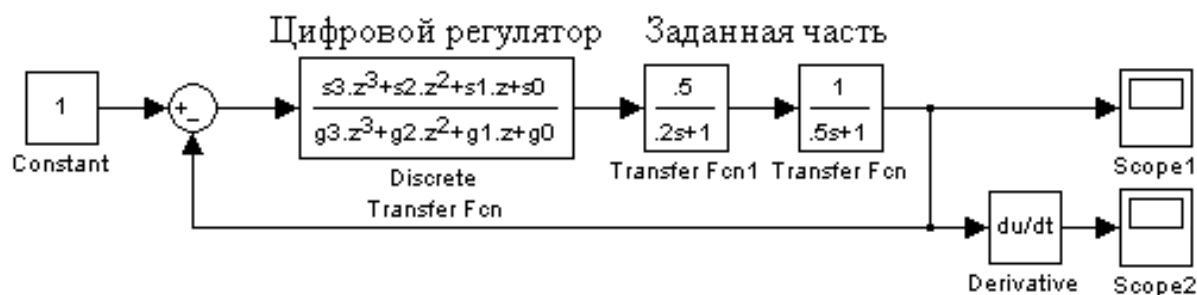


Рис. 4. Схема модели системы с цифровым регулятором

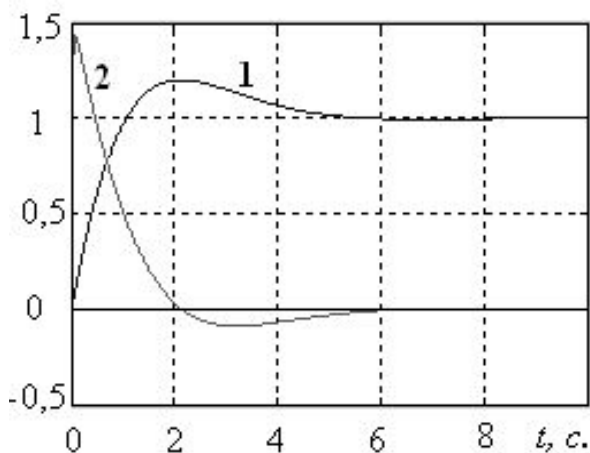


Рис. 5. Переходная характеристика  $h(t)$  (1), скорость изменения выходной величины  $dh/dt$  (2)

### Выводы

1. Рассмотренный метод расчета позволяет провести расчет регулятора для системы с астатизмом второго порядка при условии, что максимальное перерегулирование в переходной характеристике не превысит заданную величину либо при условии, что максимальная скорость изменения выходного сигнала не превысит заданного значения.

2. Метод позволяет синтезировать регулятор по одному из принятых показателей качества – по максимальному перерегулированию либо максимальной скорости изменения выходного сигнала, при этом есть возможность проконтролировать величину второго показателя качества.

3. Метод позволяет рассчитать цифровой регулятор для системы, заданная часть которой может иметь любой порядок.

### Список использованной литературы

1. Бессекерский В. А. Теория систем автоматического регулирования / В. А. Бессекерский, Е. П. Попов. – М. : Наука, 1972. – 719 с.
2. Батоврин А. А. Цифровые следящие системы судовой автоматики / [Батоврин А. А., Дашевский П. Г., Лебедев В. Д. и др.]. – Л. : Судостроение, 1972. – 445 с.
3. Мирошник И. В. Свойства управлений с заданной интегральной оценкой переходного процесса / И. В. Мирошник – М. : Автоматика и телемеханика. – 1982. – № 4. – С. 16 – 29.
4. Фишман Л. З. Условия сохранения характера границы области устойчивости непрерывной системы при замене её дискретной / Л. З. Фишман. – М. : Автоматика и телемеханика. – 1991. – № 4. – С. 186 – 189.
5. Круг Б. К. О точности воспроизведения алгоритмов регулирования в аналого-цифровых динамических системах / Б. К. Круг. – М. : Автоматика и телемеханика. – 1994. – № 6. – С. 34 – 43.
6. Краснопрошина А. А. Современный анализ систем управления с применением MATLAB, Simulink, Control System / А. А. Краснопрошина, Н. Репникова, А. А. Ильченко. – К. : Корнійчук, 1999. – 141 с.
7. Мозжечков В. А. Синтез линейных регуляторов с простой структурой / В. А. Мозжечков. – М. : Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 1. – С. 27 – 46.
8. Кочубиевский И. Д. Искажение спектра непрерывного сигнала, вносимое дискретизацией по времени / И. Д. Кочубиевский, С. Д. Козюра. – М. : Автоматика и телемеханика. – 1990. – № 2. – С. 178 – 182.

9. Бобриков С.А. Преобразование непрерывной передаточной функции управляющего устройства в дискретную / С. А. Бобриков, Е. Д. Пичугин // *Электротехнические и компьютерные системы*. – К. : Техніка. – 2013. – № 10 (86). – С. 68 – 72.

10. Galicia M.a , Loukianov A.a , Rivera J.b, and Utkin V.I.c . Discrete-time Sliding Mode Regulator for no Minimum Phase Systems (*Conference Paper*), (2012), *51st IEEE Conference on Decision and Control, CDC 2012, Department of Electrical and Computer Engineering, Ohio State University*, pp. 7708 – 7713. ISSN: 01912216 CODEN: PCDCD Source Type: *Conference Proceeding Original Language: English*, doi: 10.1109/CDC.2012.6425813 Document Type: *Conference Paper*, url : <http://scihub.org/pdfcache/9a5db4d1689f19cc2ae8c894ac9aa5d8.pdf>.

11. Wang G., Chen Q., and Ren Z. Modeling of Time-varying Discrete-time Systems, (2011), Vol. 5, Issue 1, pp. 104 – 112. ISSN: 17519675 Source Type: *Journal Original language: English*, doi: 10.1049/iet-spr.2008.0071. Document Type: *Article*, url: <http://95.25.47.1/scimag4/10.1049/iet-spr.2008.0071.pdf>.

12. Mija S.J., and Thomas S. Design of Optimal Discrete Sliding Mode Controllers, (2012), *Department of Electrical Engineering, National Institute of Technology Calicut, India*, Vol. 40, Issue 2, pp. 119 – 124. ISSN: 14801752 CODEN: CISSFS Source Type: *Journal Original Language: English*, doi: 10.2316/Journal.201.2012.2.201-2349. Document Type: *Article*.

13. Maione G. Thiele's Continued Fractions in Digital Implementation of no Integer Differ-integrators, (2012), *Department of Electrical and Electronic Engineering, Technical University of Bari*. Vol. 6, Issue 3, pp. 401 – 410. ISSN: 18631703 Source Type: *Journal Original Language: English*, doi: 10.1007/s11760-012-0319-z. Document Type: *Article*, url : <http://95.25.47.1/scimag5/10.1007/s11760-012-0319-z.pdf>.

14. Leon De La Barra B.a , El-Khoury M.b, and Fernandez M.a . On Undershoot in Scalar Discrete-time Systems, (2007), *Department of Electrical Engineering, University of Chile*,

Santiago. ISSN: 00051098 CODEN: ATCAA Source Type: *Journal Original Language: English*, doi: 10.1016/0005-1098(96)85556-7. Document, url : <http://95.25.47.1/scimag2/10.1016/0005-1098%252896%252985556-7.pdf>.

Получено 15.09.2013

## References

1. Bessekerskii V.A., and Popov E.P. Teoriya sistem avtomaticheskogo regulirovaniya [Theory of Systems of Automatic Control], (1972), Moscow, Russian Federation, *Science Publ.*, 719 p. (In Russian).

2. Batovrin A.A., Dashevskii P.G., Lebedev V.D. i dr. Tsifrovye sledyashchie sistemy sudovoi avtomatiki [Digital Watching Systems of Ship Automatic Equipment] (1972), Leningrad, Russian Federation, *Shipbuilding Publ.*, 445 p. (In Russian).

3. Miroshnik I.V. Svoistva upravlenii s zadannoi integral'noi otsenkoi perekhodnogo protsessa [Properties of Managements with the set Integrated Assessment of Transient], (1982), Moscow, Russian Federation, *Automatics and Telemechanics Publ.*, No. 4, pp.16 – 29 (In Russian).

4. Fishman L.Z. Usloviya sokhraneniya kharaktera granitsy oblasti ustoichivosti nepreryvnoi sistemy pri zamene ee diskretnoi [Conditions of Border area Character Preservation Stability of Continuous System when Replacing its Discrete], (1991), Moscow, Russian Federation, *Automatics and Telemechanics Publ.*, No. 4, pp. 186 – 189 (In Russian).

5. Krug B.K. O tochnosti vosproizvedeniya algoritmov regulirovaniya v analogo-tsifrovyykh dinamicheskikh sistemakh [About the Regulation Algorithms Reproduction Accuracy in Analog-digital Dynamic Systems], (1994), Moscow, Russian Federation, *Automatics and Telemechanics Publ.*, No. 6, pp. 34 – 43 (In Russian).

6. Krasnoproshina A.A., Repnikova N., and Il'chenko A.A. Sovremennyi analiz sistem upravleniya s primeneniem MATLAB, Simulink, Control Sistem [The Modern Analysis of Control Systems with Application MATLAB, Simulink, Control Sistem], (1999), Kiev,

Ukraine, *Korneichuk Publ.*, 141 p. (In Ukrainian).

7. Mozzhechkov V.A. Sintez lineinykh regulyatorov s prostoi strukturoi [Synthesis of Linear Regulators with Simple Structure] (2003), Moscow, Russian Federation, *Automatics and Telemechanics Publ.*, No. 1, pp. 27 – 46 (In Russian).

8. Kochubievskii I.D., and Kozyura S.D. Iskazhenie spektra nepreryvnogo signala, vnosimoe diskre-tizatsiei po vremeni [Distortion of a Continuous Signal Range, Brought by Sampling] (1990), Moscow, Russian Federation, *Automatics and Telemechanics Publ.*, No. 2, pp. 178 – 182 (In Russian).

9. Bobrikov S.A., and Pichugin E.D. Preobrazovanie nepre-ryvnoi peredatochnoi funktsii upravlyayushche-go ustroystva v diskretnuyu [Transformation of Continuous Transfer Function of the Actuation Device to the Discrete], (2013), Kiev, Ukraine, *Electrotechnic and Computer Systems, Technica Publ.*, No.10 (86), pp. 68 – 72 (In Russian).

10. Galicia M.a , Loukianov A.a , Rivera J.b, and Utkin V.I.c . Discrete-time Sliding Mode Regulator for no Minimum Phase Systems (*Conference Paper*), (2012), *51st IEEE Conference on Decision and Control, CDC 2012, Department of Electrical and Computer Engineering, Ohio State University*, pp. 7708 – 7713. ISSN: 01912216 CODEN: PCDCD Source Type: *Conference Proceeding Original Language: English*, doi: 10.1109/CDC.2012.6425813. Document Type: Conference Paper, url : <http://scihub.org/pdfcache/9a5db4d1689f19cc2ae8c894ac9aa5d8.pdf>.

11. Wang G., Chen Q., and Ren Z. Modeling of Time-varying Discrete-time Systems, (2011), Vol. 5, Issue 1, pp. 104 – 112. ISSN: 17519675 Source Type: *Journal Original Language: English*, doi: 10.1049/iet-spr.2008.0071. Document Type: Article, url: <http://95.25.47.1/scimag4/10.1049/iet-spr.2008.0071.pdf>.

12. Mija S.J., and Thomas S. Design of Optimal Discrete Sliding Mode Controllers, (2012), *Department of Electrical Engineering, National Institute of Technology Calicut, India*, Vol. 40, Issue 2, pp. 119 – 124. ISSN: 14801752 CODEN: CISSF Source Type: *Jour-*

*nal Original Language: English*, doi: 10.2316/Journal.201.2012.2.201-2349.

Document Type: Article.

13. Maione G. Thiele's Continued Fractions in Digital Implementation of no Integer Differentiators, (2012), *Department of Electrical and Electronic Engineering, Technical University of Bari*, Vol. 6, Issue 3, pp. 401 – 410. ISSN: 18631703 Source Type: *Journal Original language: English*, doi: 10.1007/s11760-012-0319-z Document Type: Article, url : <http://95.25.47.1/scimag5/10.1007/s11760-012-0319-z.pdf>.

14. Leon De La Barra B.a, El-Khoury M.b, and Fernandez M.a . On Undershoot in Scalar Discrete-time Systems, (2007), *Department of Electrical Engineering, University of Chile, and Santiago*. ISSN: 00051098 CODEN: ATCAA Source. Type: *Journal Original Language: English*, doi: 10.1016/0005-1098(96)855567. Document, url : <http://95.25.47.1/scimag2/10.1016/0005-1098%252896%252985556-7.pdf>.



Бобриков Сергей Александрович, доц. каф. компьютеризированные системы управления Одесского нац. политехнического ун-та, e-mail: bobrikov1932@mail.ru



Пичугин Евгений Дмитриевич, проф. каф. компьютеризированных систем управления Одесского нац. политехнического ун-та, тел. 7778045, e-mail: bobr\_eugen@mail.ru