УДК 378:514.74

О.В. Кузякіна,
викладач
Херсонський політехнічний коледж Одеського національного політехнічного університету
kuzyakinaov@rambler.ru

С.В. Рослякова,
викладач-методист
Херсонський політехнічний коледж Одеського національного політехнічного університету
sv.roslyakova@gmail.com

ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДО ОПИСУ РЕАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ У КУРСАХ СПЕЦІАЛЬНИХ ДИСЦИПЛІН

О.В. Кузякіна, С.В. Рослякова. Застосування диференціальних рівнянь до опису реальних процесів у курсах спеціальних дисциплін. Запропонована стаття демонструє наукові прикладні дослідження з даної теми.

O.V. Kuzyakin, S.V. Roslyakova. Application of differential equations to describe the real processes in the course of special subjects. The proposed article demonstrates scientific applied research on the topic.

Вступ. Підсилення практичної направленості викладання є одним із основних завдань освіти. Перетворення науки в безпосередньо виробничу силу веде до того, що знання з предметів природничо-математичного циклу стають не тільки базою для оволодіння спеціальними знаннями: вони виступають в якості кваліфікованих вимог до працівників багатьох сучасних професій. Ось чому професійна направленість стає необхідною умовою викладання, показує застосування в практиці, впливає на ефективність діяльності майбутнього фахівця.

Здійснення зв’язку навчання з життям сприяє використання в процесі навчання задач з виробничим змістом. З цією метою необхідно використовувати задачі, виробнича сутність яких студентам знайома, враховуючи при цьому і спеціальність, яку вони отримують, навчаючись у коледжі.

Матеріали дослідження. Найбільш важкими для засвоєння в диференціальному та інтегральному численні є тема «Диференціальні рівняння». Вона потребує знань похідних, інтегралів та різноманітних алгебраїчних перетворень. Тому необхідно не тільки навчити розв’язувати диференціальні рівняння, а й показати застосування цих рівнянь в технічних розрахунках прикладних дисциплін, так як студенти частіш за все бачать кінцеву формулу того або іншого питання, але не розуміють як прийшли до цієї формули.

Вивчаючи статті доктора фізико-математичних наук, професора Л.С. Понтрягіна було помічено, що частіш за все вчені здійснюють математичну ідеалізацію процесів не звертаючи увагу на малі величини. З цієї причини виникають диференціальні рівняння, які не завжди повністю описують фізичний процес. В процесі подальшого математичного дослідження виникає необхідність використовувати фізичні міркування. Так утворюються нові математичні задачі, в яких застосовуються диференціальні рівняння з похідними вищих порядків.

Курс диференціальних рівнянь включає деякі їх застосування, які важливі для техніки. Залучення студентів до розв'язування задач з використанням диференціальних рівнянь сприяє розумінню ними важливості долучатися до створення наукових розробок. В умовах навчального процесу ВНЗ I-II рівня акредитації, який має більш практичну спрямованість, було використано наступний підхід до організації дослідницької роботи студентів. Творчій групі студентів, які засвоїли алгоритми розв'язування диференціальних рівнянь, запропонували розглянути задачі, що носять практичний характер і приводять до складання і розв'язання диференціальних рівнянь. Під керівництвом викладачів студенти виконали цю роботу і підготувалися до виступу на студентській конференції "Застосування диференціальних рівнянь до опису реальних процесів у курсах спеціальних дисциплін". У більшості задач студентам необхідно було знайти розв'язок, але деякі задачі були запропоновані вже з розв'язком, але без готового ланцюжка розв'язання. Завданням студентів було визначали вид диференціального рівняння і спосіб його розв'язання.

Далі приведемо приклади задач, які були представлені на конференції.

Задача про центробіжний регулятор (дослідження Вишнеградського). Суть цієї задачі зводилася до складання рівняння другого порядку. Студентам запропоновано було розібрати хід дослідження з використанням диференціального рівняння, яке описує рух маси під дією сили.

В сучасній техніці завдяки достатній кількості приладів автоматичного управління надзвичайно велику роль відіграє теорія автоматичного регулювання. Одним з найважливіших питань, що виникають перед конструктором автоматичного регулятора, є питання про стійкість роботи системи машина – регулятор.

Відцентровий регулятор (Рис. 1) являє собою вертикальний стрижень *S*, що може обертатися навколо своєї вертикальної осі, у верхньому кінці якого на шарнірах підкріплені два однакових стрижня L_1 і

L_2 з однаковими вантажами на кінцях. Стрижні L_1 і L_2 скріплені додатковими шарнірами, так що відхилятися від свого вертикального положення вони можуть лише одночасно на один і той же кут φ, перебуваючи в одній і тій же вертикальній площині, нерухомо пов'язаної зі стрижнем S. Коли стрижні L_1 і L_2 відхиляються від свого вертикального положення на кут φ, вони за допомогою шарнірів приводять в рух спеціальну муфту M, надягнуту на стрижень S, так що відстань цієї муфти до верхнього кінця стрижня S пропорційне cos φ.

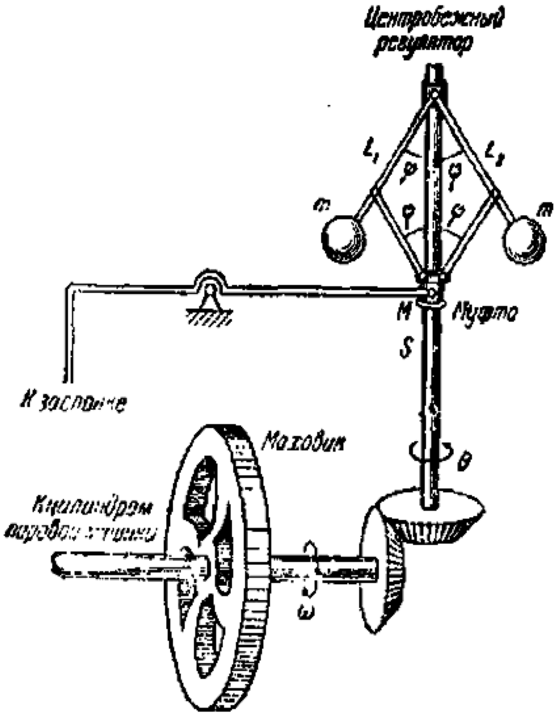

Рис. 1. Центробіжний регулятор

Довжину вертикальних стрижнів L_1 і L_2 приймемо за одиницю, а масу кожного з вантажів, прикріплених на їх кінцях, позначимо через m. Якщо стрижень S обертається з кутовою швидкістю θ, а стрижні L_1 і L_2 відхилені від вертикального положення на кут φ, то на кожен з вантажів діє відцентрова сила $m\theta^2 \sin\varphi$ Одночасно на кожен вантаж діє сила тяжіння, що дорівнює mg . Так як в напрямі стрижні L_1 сили, що діють на вантаж, врівноважуються реакцією стрижня L_2, то для розрахунку сили, діючої на вантаж, слід розкласти обидві згадані сили по осях, перша з яких спрямована уздовж стрижня, а друга — в перпендикулярному напрямку, в бік зростання кута φ. Бачимо, що складова сила в напрямку зростання кута φ дорівнює $m\theta^2 \sin\varphi\cos\varphi$, а складова сили тяжіння в тому ж напрямку дорівнює $-mg\sin\varphi$. Таким чином, рівнодіюча обох сил задається формулою

$$m\theta^2 \sin\varphi\cos\varphi - mg\sin\varphi. \quad (1)$$

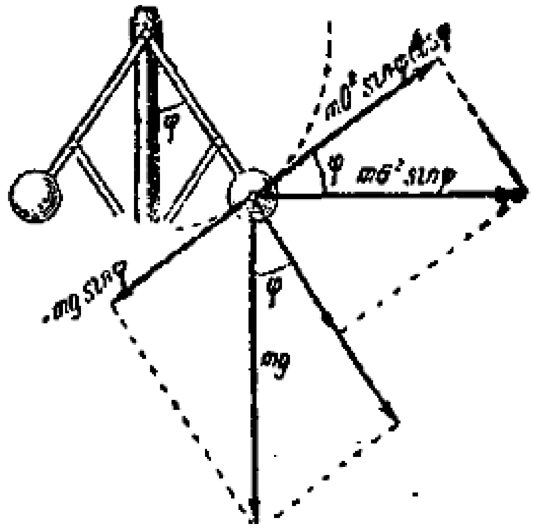

Рис. 2. Робота регулятора

Спрощене пояснення роботи відцентрового регулятора (Рис 2) полягає в тому, що при заданій кутовий швидкості θ стрижні L_1 і L_2 відхиляються під дією відцентрової сили і сили тяжіння на кут φ, який визначається з рівності

$$m\theta^2 \sin\varphi\cos\varphi - mg\sin\varphi = 0, \quad (2)$$

тобто шляхом прирівнювання обох сил. Зі співвідношення вище, кут φ визначається як однозначна монотонно зростаюча функції швидкості θ; в цьому сенсі регулятор Уатта може розглядатися як вимірювач швидкості обертання. Це є так званий статистичний розгляд регулятора. Насправді ми маємо тут динамічне явище. Маса m, перебуваючи під впливом рівнодіючої сили робить рух, що описує диференціальним рівнянням. Крім рівнодіючої сили на масу m впливає при її русі сила тертя в зчленованих шарнірах. Сила ця вельми складним чином залежить від того, як відбувається рух. Істотно спрощуючи наявну тут складність, ми будемо вважати, що сила тертя пропорційна швидкості руху φ, масі m і має знак, протилежний цій швидкості, тобто має величину $-b\varphi$, де b - постійна.

Таким чином, якщо прийняти φ за координату, що визначає положення маси m, то ми отримаємо для φ диференціальне рівняння:

$$m\varphi'' = m\theta^2 \sin\varphi \cos\varphi - mg\sin\varphi - b\varphi \qquad (3)$$

На першому етапі студенти не розв'язують це рівняння, а продовжують досліджувати роботу машини з даним автоматичним регулятором.

Інша задача, яка була розглянута про **ефективність реклами**. Ця задача викликала жвавий інтерес у студентів економічних спеціальностей.

Припустимо, що торговельними установами реалізується продукція B, про яку в момент часу t з числа потенційних покупців N знає лише x покупців. Припустимо далі, що для прискорення збуту продукції B були дані рекламні оголошення по радіо і телебаченню. Подальша інформація про продукцію поширюється серед покупців за допомогою спілкування один з одним. З великим ступенем вірогідності можна вважати, що після рекламних оголошень швидкість зміни числа обізнаних про продукцію B пропорційна як числу знаючих про товар покупців, так і числу покупців, які про нього ще не знають.

Якщо домовитися, що час відраховується після рекламних оголошень, коли про товар дізналося N/γ людей, то приходимо до диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = kx(N-x) \qquad (4)$$

Розв'язуємо рівняння: $\int \frac{dx}{x(N-x)} = \int kdt;$

$$\frac{1}{x(N-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{N-x};\ a = \frac{1}{N}; b = \frac{1}{N};\ \frac{1}{N}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{N}\int \frac{dx}{N-x} = \int kdt;$$

$\frac{1}{N}(\ln x - \ln|N-x|) = kt;$ з початковими умовами $x = N/\gamma$ при $t = 0$.

У рівнянні коефіцієнт k – це додатній коефіцієнт пропорційності. Інтегруючи рівняння , знаходимо, що

$$\frac{1}{N}\ln\frac{x}{N-x} = kt + C. \qquad (5)$$

Вважаючи $NC = C_1$, приходимо до рівності

$$\frac{x}{N-x} = Ae^{Nkt}, \qquad (7)$$

де $A = e^{C_1}$.

Якщо останнє рівняння розв’язати відносно x, то отримаємо співвідношення

$$x = N\frac{Ae^{Nkt}}{Ae^{Nkt}+1} = \frac{N}{1+Pe^{-Nkt}}, \tag{8}$$

де $P=1/A$.

В економічній літературі рівняння зазвичай називають *рівнянням логістичної кривої*. Якщо врахувати тепер початкові умови, то рівняння перепишеться у вигляді:

$$x = \frac{N}{1+(\gamma-1)e^{-Nkt}}. \tag{9}$$

На рис. 3 схематично зображено логістичну криву $\gamma = 2$. Відзначимо, що дане рівняння застосовується, зокрема, для задач про поширення технологічних нововведень.

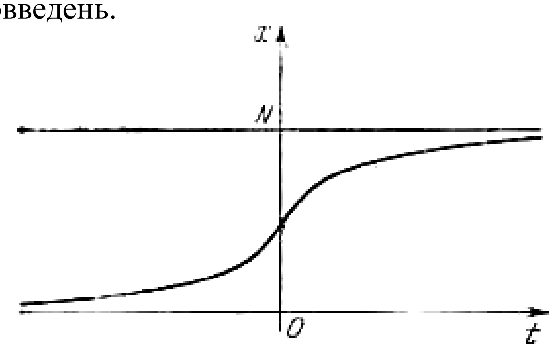

Рис. 3. Логістична крива

Також було запропоновано стандартну **задачу про зміну температурних режимів тіла**, яке помістили у приміщення.

У кімнаті, де температура 20°C, деяке тіло охололо за 20 хв. від 100°C до 60°C. Знайти закон охолодження тіла; через скільки хвилин воно охолоне до 30°C? Підвищенням температури в кімнаті знехтувати.

Розв'язання. В силу закону Ньютона (швидкість охолодження пропорційна різниці температур) можемо написати: $\frac{dT}{dt} = k(T-20)$, або $\frac{dT}{T-20} = kdt$, звідки $\ln(T-20) = kt + \ln C$. При $t=0,\quad T=100^0$, знаходимо $C=80$. При $t=20,\quad T=60^0$, $\ln 40 = 20k + \ln 80$, звідки $k = -\frac{1}{20}\ln 2$. Отже, остаточно: $T-20=80e^{-\frac{1}{20}t\cdot\ln 2}=80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$, або $T=20+80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$. При $T=30^0$ маємо $10=80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$, або $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}=\frac{1}{8}$. Таким чином, $\frac{t}{20}=3$, звідки $t = 60$ хв.

Для підвищення інтересу студентів була запропонована задача розважального характеру: «**Чия кава більш гаряча**?».

Анатолій та Володимир замовили в кафе каву і вершки. Коли їм одночасно подали по чашці однаково гарячої кави і вершків, вони зробили наступним чином. Анатолій додав в каву трохи вершків, накрив чашку паперовою серветкою і вийшов зателефонувати. Володимир відразу ж накрив чашку паперовою серветкою, а додав ту ж кількість вершків тільки через 10 хв., коли повернувся Анатолій, і вони почали пити каву разом. Хто ж пив більш гарячу каву?

Задачу будемо вирішувати з урахуванням природних припущень, які відображають фізичний зміст процесів, що відбуваються і полягають у наступному. Вважаємо, що теплообмін через поверхню столу і серветки набагато менше теплообміну через бічні стінки чашок; температура пари в чашці над поверхнею рідини дорівнює температурі рідини.

Виведемо спочатку співвідношення, що показує, як з плином часу змінювалася температура кави в чашці Володимира до змішування кави з вершками.

Відповідно до прийнятих припущень на основі відомого закону фізики кількість теплоти, отримане повітрям від чашки Володимира, визначається співвідношенням

$$dQ=\eta\frac{T-\theta}{I}sdt, \qquad (10)$$

де T - температура кави в момент часу t, θ - температура повітря в кафе, η – теплопровідність матеріалу чашки, l – товщина стінок чашки, s – площа бічної поверхні стінок чашки. З іншого боку, кількість теплоти, віддане кави, знаходимо з рівності:

$$dQ=-cmdT, \qquad (11)$$

де c – питома теплоємність кави, m – маса кави в чашці. Розглядаючи тепер разом рівняння (10) і, (11), приходимо до рівняння

$$\eta\frac{T-\theta}{I}sdt=-cmdT, \qquad (12)$$

яке, розділяючи змінні, можна переписати у вигляді

$$\frac{dT}{T-\theta} = -\frac{\eta s}{Icm}dt \tag{13}$$

Позначаючи початкову температуру кави через T_0 і інтегруючи диференціальне рівняння (13), знаходимо, що

$$T = \theta + (T_0 - \theta)e^{-\frac{\eta s}{Icm}\cdot t} \tag{14}$$

Формула (14) і є аналітичний опис закону, за яким змінювалася температура кави в чашці Володимира до змішування кави з вершками.

Подивимося тепер, якою буде закон зміни температури кави після того, як Володимир додав в чашку вершки. Для цього скористаємося рівнянням теплового балансу, яке в нашому випадку запишеться у вигляді:

$$cm(T-\theta) = c_1 m_1(\theta_1 - T_1)\,, \tag{15}$$

де θ_1 – температура суміші в момент часу t, T_1 - температура вершків, c_1 – питома теплоємність вершків, m_1 – маса вершків, додана в каву.

З рівняння (15) знаходимо, що

$$\theta_1 = \frac{c_1 m_1}{cm + c_1 m_1}T_1 + \frac{c_1 m_1}{cm + c_1 m_1}T\,. \tag{16}$$

Беручи до уваги рівність (14), формулу (16) можна переписати у вигляді

$$\theta_1 = \frac{c_1 m_1}{cm + c_1 m_1}T_1 + \frac{c_1 m_1}{cm + c_1 m_1}\left[\theta + (T_0 - \theta)e^{-\frac{\eta s}{Icm}t}\right]. \tag{17}$$

Рівність (17) і задає закон зміни температури кави після додавання в чашку Володимира вершків.

Для виведення закону зміни температури кави в чашці Анатолія знову скористаємося рівнянням теплового балансу, яке в даному випадку приймає вигляд:

$$cm(T_0 - \theta_0) = c_1 m_1(\theta_0 - T_1)\,, \tag{18}$$

θ_0 — температура суміші. З рівності (18) отримуємо, що:

$$\theta_1 = \frac{c_1 m_1}{cm + c_1 m_1}T_1 + \frac{c_1 m_1}{cm + c_1 m_1}T_0 \tag{19}$$

А тоді, скориставшись рівнянням (14), де роль початкової температури грає вже θ_0 а добуток cm замінюється сумою $cm + c_1 m_1$ остаточно отримуємо, що закон зміни температури θ_A кави в чашці Анатолія аналітично задається формулою:

$$\theta_A = \theta + \left[\frac{c_1 m_1}{cm + c_1 m_1} T_1 + \frac{c_1 m_1}{cm + c_1 m_1} T_0 - \theta \right] e^{-\frac{\eta s}{l(cm + c_1 m_1)} t} \tag{20}$$

Таким чином, для відповіді на поставлене в задачі залишається лише звернутися до формул (17) і (20) і провести чисельні розрахунки, маючи на увазі, що $c_1 \approx$ 3,9 х Дж/(кг-К), $c \approx$4,1-103 Дж/(кг-К), $\eta \approx$0,6 В/(м-К), (вважаючи для визначеності m_1=2• 10-2 кг, m=8-10-2 кг, T_1 =200С, θ =20°С, T_0=80°С, s= 11 • 10-3 м2, l=2-10-3 м. Обчислення показують, що гарячішу каву пив Анатолій.

Висновки. Запропоновані задачі мають за мету показати прикладні аспекти вищої математики як в технічних дисциплінах, так і в повсякденному житті та звернути увагу на актуальність розглянутої проблеми.

Ця робота показала, що диференціальні рівняння є одним із основних математичних понять. Диференціальні рівняння – це рівняння призначені для відшукання функцій, похідні яких задовольняють деяким наперед заданим умовам. Диференціальні рівняння, отримані в результаті дослідження якого-небудь реального явища або процесу, називають диференціальною моделлю цього явища або процесу. Зрозуміло, що диференціальні моделі – це окремий випадок тієї множини математичних моделей, які можуть бути побудовані при вивченні оточуючого нас світу. При цьому необхідно відмітити, що існують і різноманітні види самих диференціальних моделей. У подальшій роботі ми будемо розглядати лише моделі, які описуються так званими звичайними диференціальними рівняннями, однією із характерних особливостей яких є те, що невідомі функції в цих рівняннях залежать лише від однієї змінної. Таким підхід пов'язаний з тим, що студенти коледжу мають лише первинну уяву про види і розв’язки диференціальних рівнянь.

Література

1. Альошина Т.М. Урок математики: застосування дидактичних матеріалів з професійною направленістю. – М.: Вища школа, 1991.- 64ст.

2. Амелькин В.В. .Дифференциальные уравнения в приложених .– М, 2003.– 35с.

3. Понтрягин Л. С. Знакомство с высшей математикой: Диференциальные уравнения и их приложения - М.: Наука, 1988.- 208 с.

Надійшла до редакці 11.12.2015