

УДК 539.3

Ю. М. Дудзинский, д-р физ.-мат. наук, А. А. Бондарь, канд. техн. наук,
А. В. Жукова, канд. физ.-мат. наук

КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ ИЛИ ГАЗА

Рассмотрены вынужденные осесимметричные колебания цилиндрической оболочки средней длины в потоке сплошной среды вдали от точек краевого эффекта. Получены выражения изгиба оболочки, как функции параметров оболочки и газового потока, для двух типов краевых условий: шарнирного закрепления и скользящего защемления. Показано, что в случае движущейся среды амплитуда колебаний оболочки при других равных условиях всегда меньше, чем в случае покоящейся среды.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, скорость потока, поперечные колебания, число Маха.

Введение. Динамические задачи занимают значительное место в исследованиях механики деформируемого твёрдого тела, что обусловлено запросами и потребностями современной техники [1–8]. Процессы нагружения и деформирования тел взаимосвязаны в течение всего периода взаимодействия. Этим объясняется сложность нестационарных задач поведения конструкций под действием периодической или импульсной нагрузки. Исследования показали, что тонкостенные металлические, или из различных композитных материалов [9–11], или так называемые “мягкие” оболочки (надутые, затопленные струи [12–15]) при падении на них упругих волн акустического диапазона активно воздействуют на потоки сплошной среды. Вместе с тем в большинстве прикладных задач эти акустические сигналы генерируются потоками газа или жидкости внутри или снаружи оболочки.

Часто задачи о вынужденных осесимметричных колебаниях цилиндрических оболочек, находящихся под действием акустического поля давлений, решаются методом Фурье [11, 16]. Используемые в этой методике ряды для функции прогиба обладают медленной сходимостью. Для того чтобы охватить влияние концевых закреплений для некоторых оболочек, требуется привлечь несколько десятков членов ряда. Это обусловлено тем, что собственные частоты ω_k осесимметричных колебаний оболочки при относительно малых числах изгибных полуволн k практически остаются неизменными. Поэтому результаты этих вычислений применимы, как правило, для больших значений k . Однако в технике в качестве конструктивных элементов часто используются оболочки средней длины. Статья посвящена исследованию влияния потока сплошной среды во внутренней области цилиндрической оболочки на изгибные колебания её боковой поверхности. Уравнение вынужденных колебаний интегрируется в замкнутом виде. Полученное решение может быть использовано для сравнения с приближёнными решениями в более сложных задачах этого типа.

Постановка задачи и основные уравнения. Рассматриваются вынужденные осесимметричные колебания цилиндрической оболочки средней длины, находящейся под действием акустического поля давлений

$$\delta p = \frac{1}{2} \delta p_k \cdot \left\{ \exp \left[\frac{i \Omega_k z}{c(1-M)} \right] + \exp \left[-\frac{i \Omega_k z}{c(1+M)} \right] \right\} \cdot \exp(i \Omega_k t); \quad (1)$$

$$\Omega_k = (1-M^2) \cdot \frac{k \pi c}{2 \ell}; \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad (2)$$

В этих выражениях z, ℓ – координата вдоль оси и длина цилиндра; t – время; c – скорость распространения звука; $M = v/c$ – число Маха; v – скорость потока газа внутри оболочки; Ω_k – круговая акустическая частота возбуждения; δp_k – возмущение давления во входном сечении трубы. Линеаризованное выражение для нагрузки, действующей на оболочку, можно записать в виде

$$p = p_0 + \delta p - \rho_0 \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_0 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right),$$

где p_0, v_0, ρ_0 – соответственно гидростатическое давление, скорость и плотность сплошной среды в невозмущенном потоке; φ – потенциал скорости. Однако для простоты примем

$$p \approx \delta p.$$

Уравнения осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки имеют вид [9]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial z} - \frac{h^2}{12r} \cdot \frac{\partial^3}{\partial z^3} \right) w = -\frac{1-v^2}{Eh} \cdot q_z; \quad (3)$$

$$\left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial z} - \frac{h^2}{12r} \cdot \frac{\partial^3}{\partial z^3} \right) u + \frac{h^2}{12r^2} \left(r^2 \cdot \frac{\partial^4}{\partial z^4} + \frac{1}{r^2} + \frac{12}{h^2} \right) w = \frac{1-v^2}{Eh} \cdot q_r, \quad (4)$$

где h, r – толщина стенки и радиус оболочки; E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки; q_z, q_r – соответственно растягивающая и изгибающая силы, действующие на единицу площади оболочки.

Рассматриваем оболочку средней длины ($\pi r/\ell \sim 1$), причем условимся, что верхнее ее значение позволяет пренебрегать продольными силами

инерции ($q_z = 0$). В этом случае пренебрежение q_z не приведет к существенной погрешности. В уравнении (3) отбросим третье слагаемое, которое имеет порядок $(h/\ell)^2$ по сравнению со вторым слагаемым. Тогда при отсутствии осевых сил из (3) следует соотношение

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\nu}{r} \cdot w,$$

которое подставим в (4). Также в выражении (4) пренебрегаем вторым слагаемым во второй скобке как малым порядка $(h/r)^2$ и приходим к уравнению

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + D \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{Eh}{r^2} w = q_r; \quad \left(D = \frac{Eh^3}{12 \cdot (1-\nu^2)} \right). \quad (5)$$

Задача будет рассматриваться для двух типов граничных условий: шарнирное закрепление и скользящее защемление краев оболочки. Эти типы креплений часто используются в реальных конструкциях.

Решение задачи о собственных колебаниях оболочки. Очевидно, что вне зон краевого эффекта, где функции прогиба следуют функции давления (1), роль первых двух слагаемых в выражении (5) пренебрежимо мала. А в зоне краевого эффекта, где показатель изменяемости велик ($\lambda \sim 1/\sqrt{hr}$), второе слагаемое в $\nu h/r$ $\nu h/r$ раз меньше, чем первое. Поэтому достаточно точно описывать изгибные колебания по всей длине оболочки будет уравнение

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \frac{Eh}{r^2} w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \delta p, \quad (6)$$

где ρ – плотность материала оболочки.

Примем частное волновое решение в виде

$$w = (w'_k + i w''_k) \cdot \exp(i \Omega_k t). \quad (7)$$

Тогда уравнение (6) с учетом (1) и (2) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w'_k}{dz^4} + 4\beta_k^4 w'_k &= \frac{\delta p_k}{2D} [\cos(1+M)\alpha_k z + \cos(1-M)\alpha_k z]; \\ \frac{d^4 w''_k}{dz^4} + 4\beta_k^4 w''_k &= \frac{\delta p_k}{2D} [\sin(1+M)\alpha_k z - \sin(1-M)\alpha_k z]; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\beta_k^4 = \frac{\rho h}{4D} (\omega^2 - \Omega_k^2); \quad \omega^2 = \frac{R}{\rho r^2}; \quad \alpha_k = \frac{k\pi}{2\ell}.$$

Полагая, что $\beta_k^4 > 0$, получаем решение уравнений (8) в виде [17]:

$$\begin{aligned} w'_k = & \exp(\beta_k z) \cdot [C'_1 \cos(\beta_k z) + C'_2 \sin(\beta_k z)] + \\ & + \frac{\exp(-\beta_k z)}{2} [C'_3 \cos(\beta_k z) + C'_4 \sin(\beta_k z)] + \\ & + \frac{\delta p_k}{8D \beta_k^4} [\cos(1+M)\alpha_k z + \cos(1-M)\alpha_k z]; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} w''_k = & \exp(\beta_k z) \cdot [C''_1 \cos(\beta_k z) + C''_2 \sin(\beta_k z)] + \\ & + \frac{\exp(-\beta_k z)}{2} [C''_3 \cos(\beta_k z) + C''_4 \sin(\beta_k z)] + \\ & + \frac{\delta p_k}{8D \beta_k^4} [\sin(1+M)\alpha_k z - \sin(1-M)\alpha_k z]. \end{aligned} \quad (10)$$

Слагаемые с коэффициентами $D r^2 (1 \pm M)^4 / (E h)$ в обоих выражениях (9) и (10) отброшены как малые порядка $(\ell_1 k / \ell)^4$ по сравнению с единицей ($\ell_1 \sim \sqrt{hr}$ – ширина зоны краевого эффекта).

Определим коэффициенты C'_1, \dots, C'_4 для краевых условий шарнирного закрепления и скользящего защемления соответственно:

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0; \quad z = \{0, \ell\};$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad z = \{0, \ell\}.$$

Учитывая выражение (7) и отбрасывая малые члены, связанные с влиянием краев на удаленные от них участки, получаем для шарнирного закрепления:

$$w'_k = \frac{\delta p_k}{8D \beta_k^4} \left\{ \begin{array}{l} \cos(1+M)\alpha_k z + \cos(1-M)\alpha_k z - \\ \sin(1+M)\alpha_k z - \sin(1-M)\alpha_k z \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
& -2 \exp(-\beta_k z) \left[\cos(\beta_k z) + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_k}{\beta_k} \right)^2 (1 + M^2) \sin(\beta_k z) \right] + \\
& + 2(-1)^{\frac{k+3}{2}} \left(\frac{\alpha_k}{\beta_k} \right)^2 M \cdot \exp[\beta_k(z - \ell)] \cdot \sin\left(\frac{M k \pi}{2}\right) \cdot \sin[\beta_k(\ell - z)] \Bigg\}; \quad (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w''_k = & \frac{\delta p_k}{8D \beta_k^4} \left\{ \sin(1 + M) \alpha_k z - \sin(1 - M) \alpha_k z - \right. \\
& \left. - 2(-1)^{\frac{k+3}{2}} \left(\frac{\alpha_k}{\beta_k} \right)^2 M \cdot \exp[\beta_k(z - \ell)] \cdot \cos\left(\frac{M k \pi}{2}\right) \cdot \sin[\beta_k(\ell - z)] \right\}, \quad (12)
\end{aligned}$$

и в случае скользящего защемления –

$$\begin{aligned}
w'_k = & \frac{\delta p_k}{8D \beta_k^4} \left\{ \cos(1 + M) \alpha_k z + \cos(1 - M) \alpha_k z - \right. \\
& - 2 \cdot \exp(-\beta_k z) \left[\cos(\beta_k z) + \sin(\beta_k z) \right] - \\
& \left. - 2(-1)^{\frac{k+3}{2}} \left(\frac{\alpha_k}{\beta_k} \right) \cdot \exp[\beta_k(z - \ell)] \cdot \cos\left(\frac{M k \pi}{2}\right) \cdot \sin[\beta_k(\ell - z)] \right\}; \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w''_k = & \frac{\delta p_k}{8D \beta_k^4} \left\{ \sin(1 + M) \alpha_k z - \sin(1 - M) \alpha_k z - 2M \cdot \exp(-\beta_k z) \cdot \sin(\beta_k z) - \right. \\
& \left. - 2(-1)^{\frac{k+3}{2}} \left(\frac{\alpha_k}{\beta_k} \right) M \cdot \exp[\beta_k(z - \ell)] \cdot \sin\left(\frac{M k \pi}{2}\right) \cdot \sin[\beta_k(\ell - z)] \right\}. \quad (14)
\end{aligned}$$

Анализ результатов. В выражениях для функций прогиба (11)–(14) слагаемые с коэффициентами $\exp(-\beta_k z)$ и $\exp[-\beta_k(z - \ell)]$, описывают краевой эффект и быстро затухают. С приближением Ω_k к значению ω зона краевого эффекта расширяется. Следовательно, согласно (2), с увеличением

скорости потока зона краевого эффекта сужается. Сдвиг фаз прогибов по длине оболочки вне зон краевого эффекта согласно (11)–(14) – линейный и совпадает с фазовым соотношением для функции давления:

$$\varphi_k = M \alpha_k z \quad (\ell_1 \leq z \leq \ell - \ell_1).$$

Это является следствием того, что в выражениях для прогибов были отброшены члены, соответствующие деформации по оси z , как малые порядка $(\ell_1 k / \ell)^4$, по сравнению с единицей.

Рассмотрим случай осесимметричных вынужденных колебаний цилиндрической оболочки. Если число Маха $M = 0$, то из выражений (12) и (14) следует, что $\bar{w}''_k = 0$. Из выражений (11) и (13) при $M = 0$ получаем для шарнирного закрепления краев оболочки

$$\bar{w}'_k = \frac{\delta p_k}{4D \bar{\beta}_k^4} \left[\cos(\alpha_k z) - \exp(-\bar{\beta}_k z) \cdot \left(\cos(\bar{\beta}_k z) + \frac{\alpha_k^2}{2\bar{\beta}_k^2} \sin(\bar{\beta}_k z) \right) \right] \quad (15)$$

и в случае скользящего защемления –

$$\begin{aligned} \bar{w}'_k = \frac{\delta p_k}{4D \bar{\beta}_k^4} & \left[\cos(\alpha_k z) - \exp(-\bar{\beta}_k z) \left(\cos(\bar{\beta}_k z) + \sin(\bar{\beta}_k z) \right) - \right. \\ & \left. - (-1)^{\frac{k+3}{2}} \left(\frac{\alpha_k}{\bar{\beta}_k} \right) \cdot \exp[\bar{\beta}_k(z - \ell)] \cdot \sin[\bar{\beta}_k(\ell - z)] \right]; \quad (16) \end{aligned}$$

$$\bar{\beta}_k^4 = \frac{\rho h}{4D} (\omega^2 - \bar{\Omega}_k^2); \quad \bar{\Omega}_k = \frac{k \pi c}{2\ell},$$

где $\bar{\Omega}_k$ – частота акустических волн в покоящейся сплошной среде.

Коэффициент влияния скорости потока на осесимметричные изгибные колебания цилиндрической оболочки вне зоны краевого эффекта с учетом (11), (13), (15), (16) равен:

$$C_v = \frac{w'_k}{\bar{w}'_k} = \left(\frac{\bar{\beta}_k}{\beta_k} \right)^4 \cos(M \alpha_k z). \quad (17)$$

С учетом выражений (2) и (8) формулу (17) можно представить в виде

$$C_v \approx \left[1 - 2M^2 \left(1 - \frac{M^2}{2} \right) \cdot \frac{\bar{\Omega}_k^2}{\omega^2 - \bar{\Omega}_k^2} \right] \cos(M \alpha_k z). \quad (18)$$

Из выражения (18) логически получаем

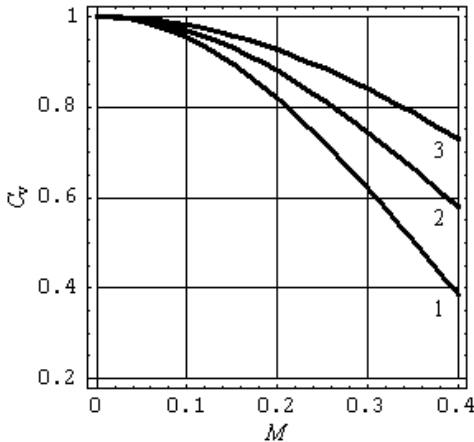
$$v \neq 0 \Rightarrow M > 0 \Rightarrow C_v = \frac{w'_k}{w''_k} < 1.$$

Следовательно, в случае движущейся среды амплитуда колебаний оболочки при других равных условиях всегда меньше, чем случае покоящейся среды. На рис. 1 показаны результаты расчетов коэффициента влияния скорости потока для оболочки средней длины, по образующей которой укладывается одна изгибная полуволна. Кривая 1 соответствует случаю, когда частота Ω возбуждающей акустической волны на входе составляет 80% от собственной частоты оболочки ω , кривая 2—70%, кривая 3—50% соответственно. Видно, что вблизи собственных частот влияние C_v весьма существенно даже при малых числах

Маха. Для случая, когда $\beta_k^4 < 0$ решение уравнений (8) можно получить аналогичным образом. Однако это имеет место при параметрах оболочки и газового течения, удовлетворяющих условию

$$(1 - M^2) k \pi c > \frac{2\ell}{r} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (c = \sqrt{\gamma R T_0}), \quad (19)$$

где γ , T_0 — показатель адиабаты и температура невозмущенного газа; R — газовая постоянная.



1 — $\Omega/\omega = 0,8$, 2 — $\Omega/\omega = 0,7$, 3 — $\Omega/\omega = 0,5$

Рис. 1. — Коэффициент влияния скорости потока на амплитуду изгиба при разных отношениях акустической частоты к собственной частоте оболочки

Однако этот случай в рассматриваемой задаче представляет меньший интерес. Действительно, для потока газа с температурой $T_0 = 1000 \text{ K}$ в

соответствии с (19) размеры стальной оболочки ($E = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ – при T_0 , $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$) должны удовлетворять условию $\ell/r < 0,2k$. Но тенденцию к возникновению продольных колебаний (1) в основном имеют трубы, у которых $\ell/r > 1$. С другой стороны, число полуволн k не может принимать значения больше единицы, если труба относительно короткая. Лишь при очень высоких температурах потока, когда скорость звука c значительно возрастает, а модуль упругости E значительно падает, возможен случай $\beta_k^4 < 0$.

Выводы. По результатам проведенных исследований можно сделать следующие выводы.

1. Амплитуда осесимметричных изгибных колебаний цилиндрической оболочки, находящейся в потоке сплошной среды, всегда меньше, чем в случае покоящейся среды.

2. С возрастанием числа Маха потока амплитуда колебаний оболочки существенно уменьшается.

3. Наибольший коэффициент влияния скорости потока вблизи резонанса.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Дудзинский Ю. М.** Вынужденные колебания осесимметричной затопленной струйной оболочки / Ю. М. Дудзинский, В. Г. Попов // Прикл. мех. – 2005. – **41**, № 4. – С. 60–65.

2. **Зельдович Я. Б.** Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений / Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер. – М.: Наука, 1966. – 627 с.

3. **Замышляев Б. В.** Динамические нагрузки при подводном взрыве / Б. В. Замышляев, Ю. С. Яковлев. – Л.: Судостроение, 1967. – 387 с.

4. **Гринченко В. Т.** Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров / В. Т. Гринченко. – К.: Наук. думка, 1978. – 264 с.

5. **Гринченко В. Т.** Гармонические колебания и волны в упругих телах / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.

6. Экспериментальное исследование тонкостенных конструкций / Под ред. А. Н. Гузя, В. А. Заруцкого. – К.: Наук. думка, 1984. – 240 с.

7. **Гринченко В. Т.** Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках / В. Т. Гринченко, И. В. Вовк. – К.: Наук. думка, 1986. – 240 с.

8. **Гринченко В. Т.** Электроупругость / Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5 т. / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, А. Н. Шульга. – К.: Наук. думка, 1989. – 200 с.

9. **Ляхов В. Н.** Воздействие ударных волн и струй на элементы конструкций / В. В. Поддубный, В. В. Титаренко. – М.: Машиностроение, 1989. – 392 с.

10. **Гузь А. Н.** Динамика системы оболочек, погруженных в жидкость / А. Н. Гузь, В. Д. Кубенко, А. Е. Бабаев // Прикл. мех. – 2002. – **38**, № 3. – С. 260–301.

11. **Гузь А. Н.** Движение твердых частиц в жидкости под воздействием акустического поля: Механизм радиационного давления / А. Н. Гузь, А. П. Жук // Прикл. мех. – 2004. – **40**, № 3. – С. 246–265.

12. **Ковальчук П. С.** Окружные бегущие волны на цилиндрических оболочках / П. С. Ковальчук, В. Г. Филин // Прикл. мех. – 2003. – **39**, № 2. – С. 192–196.

13. **Дудзинский Ю. М.** Амплитудно-частотные характеристики осесимметричных струйных оболочек // Акуст. вісн. – 2005. – **8**, № 3. – С. 44–49.

14. **Дудзинский Ю. М.** Динамика затопленной осесимметричной кольцевой струи / Ю. М. Дудзинский // Доповіді НАН України. – 2006, №1. – С. 46–51.

15. **Дудзінський Ю. М.** Динаміка струминної оболонки і спектр акустичного сигналу / Ю. М. Дудзінський // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. «Фіз.-мат. науки». – 2006. – №3. – С. 89–97.

16. **Перцев А. К.** Динамика оболочек и пластин / А. К. Перцев, Э. Г. Платонов. – Л. : “Судостроение”, 1987. – 400 с.

17. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М. : Наука, 1976. – С. 472–473.

Одесский национальный
политехнический университет,
Одесса, Украина

Поступила в редколлегию 01.03.2012

*Ю. М. Дудзінський, д-р фіз.-мат. наук, О. А. Бондар, канд. техн. наук,
А. В. Жукова, канд. фіз.-мат. наук*

КОЛИВАННЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ В ПОТОЦІ РІДИНИ АБО ГАЗУ

Розглянуто вимушені осесиметричні коливання циліндричної оболонки середньої довжини в потоці суцільного середовища віддалік від точок крайового ефекту. Отримані вираження згину оболонки, як функції параметрів оболонки й газового потоку, для двох типів крайових умов: шарнірного закріплення й ковзного защемлення. Показано, що у випадку середовища, що рухається, амплітуда коливань оболонки при інших рівних умовах завжди менше, ніж у випадку нерухомого середовища.

Ключові слова: циліндрична оболонка, швидкість потоку, поперечні коливання, число Маха.

*Yu. M. Dudzinsky, Professor, A. A. Bondar, Associate Professor,
A. V. Zhukova, Associate Professor*

OSCILLATIONS OF THE CYLINDRICAL SHELL IN THE STREAM OF THE FLUID OR GAZ

Compelled axially symmetric fluctuations of a cylindrical shell of average length in a stream of the continuous environment far from points of boundary effect are considered. The formulas of a bend of shell, as functions of parameters of shell and a gas stream, for two types of boundary conditions (turning fixing and a slipping pinching) it received. It shown, that in case of the moving environment the amplitude of fluctuations of shell under other equal conditions always is less, than a case of the based environment.

Keywords: cylindrical shell, velocity of a stream, traversal oscillations, number of Mach.