Міністерство освіти і науки України

Одеський національний політехнічний університет

На правах рукопису

САВИЧ Віталій Святославович

УДК 004.942.532.5

МОДЕЛІ, МЕТОД ТА ЗАСОБИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ФІЛЬТРАЦІЇ У ГЕТЕРОГЕННИХ СИСТЕМАХ

Спеціальність 01.05.02 — Математичне моделювання та обчислювальні методи

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Одеса — 2017

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано в Одеському національному політехнічному університеті Міністерства освіти і науки України

Науковий керівник доктор технічних наук, професор
Положаєнко Сергій Анатолійович,
Одеський національний політехнічний університет, завідувач кафедри комп'ютеризованих систем управління

Офіційні опоненти: доктор технічних наук, професор
Палагін Володимир Васильович,
Черкаський державний технологічний університет, завідувач кафедри радіотехніки та інформаційно-телекомунікаційних систем

кандидат технічних наук
Мосенцова Людмила Вікторівна,
Фізико-технологічний інститут металів і сплавів НАН України, науковий співробітник

Захист відбудеться «27» липня 2017 р. о 10-00 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 41.052.11 в Одеському національному політехнічному університеті за адресою: 65044, м. Одеса, просп. Шевченка, 1.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Одеського національного політехнічного університету за адресою: 65044, м. Одеса, просп. Шевченка, 1.

Автореферат розіслано «26» червня 2017 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради О. О. Фомін

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність роботи. Сучасний етап розвитку промислового виробництва та наукових досліджень в значній мірі характеризується повнотою та всебічністю вивчення фізичних процесів, які визначають сутність технологічних операцій і природних явищ. При цьому слід зазначити, що фізичну основу низки промислово важливих та поширених в природі процесів (наприклад: геологорозвідка, добуток корисних копалин, будівництво гідротехнічних споруд, меліорація, хімія полімерів, рух ґрунтових вод, розповсюдження забруднень в ґрунті тощо) складають процеси фільтрації, що розвиваються в пластових, зокрема, геологічних системах.

Відомі методи математичного моделювання, а також наявність значного класу засобів чисельної, алгоритмічної та програмної реалізації дозволяють ефективно розв'язувати сягнисте коло теоретичних і практичних задач дослідження поширених процесів фільтрації. Разом з тим відомий клас процесів фільтрації (реології), яким притаманні властивості *гетерогенності* (неоднорідності) прояву характерних фізичних явищ. Причому гетерогенність може бути притаманна як субстанції, що здійснює фільтраційних рух (багатофазні рідини, що не змішуються; суспензії; емульсії; однокомпонентні рідини зі змінною густиною, спричиненою дією згущувачів або поверхнево-активних речовин (ПАР) тощо), так і середовищу, в якому розвивається процес фільтрації (шпаруватість пористого простору; наявність включень, відмінних за хімічним складом або фізичними властивостями; прояв зовнішніх впливів та розподіленість параметрів тощо).

Розв'язування задач моделювання процесів дифузії у гетерогенних системах пов'язано з рядом принципових ускладнень як постановочного, так і обчислювального характеру. Причиною ускладнень є: нелінійний характер процесів, що розглядаються; складність геометрії границь; обмеженість вектору вимірювань простору стану процесів і точок прикладення управляючих впливів; високі розмірності результуючих кінцевовимірних аналогів математичних моделей (ММ). Не набули достатнього розвитку математичні методи опису процесів фільтрації у гетерогенних системах з вираженою спрямованістю розвитку та наявністю граничного градієнту; у фрактально-гетерогенних системах (тобто гетерогенних систем, що мають характер самоподібності фізичних явищ або просторових параметрів); у гетерогенних і фрактально-гетерогенних системах з розривністю коефіцієнтів, а також питання побудови інструментальних програмних засобів (ІПЗ), що дозволяють реалізовувати зазначені класи моделей.

Вказана вище різко виражена спрямованість розвитку низки процесів фільтрації у гетерогенних системах обумовлює адекватність їх математичної формалізації на основі апарату варіаційних нерівностей.

Широко відомі фундаментальні роботи вітчизняних та зарубіжних вчених, присвячені теорії та практиці досліджень гетерогенних систем (наприклад, роботи: А. Х. Мірзаджанзаде, Г. Г. Вахітова, Б. А. Сулейманова, Г. М. Мєлікова, Г. І. Барренблата, В. М. Єнтова, Є. Д. Ходирєва, А. М. Лінькова, A. Saez, R. I. Marshall, J. E. Warren, N. Sastova та ін.), а також використання варіаційних нерівностей щодо дослідження складних фізичних явищ, в тому числі процесів фільтрації та реології (зокрема, роботи: М. З. Згуровського, О. М. Новікова, В. С. Мельника, В. В.

Скопецького, О. І. Єгорова, В. І. Максимова, Ж.-Л. Ліонса, Г. Дюво, Г. Фікери, П. Панагіатополуса, Ф. Кіндерлерера, Г. Стампак'і та ін.). Крім того, на теперішній час, наявним є досвід створення систем моделювання дифузійними і, як їх різновид, фільтраційними процесами у пористих середовищах, функціонування яких організовано за результатами обчислювальних експериментів. Не дивлячись на це, визначною залишається актуальність теоретичних досліджень щодо побудови і практичних застосувань при розв'язуванні прикладних задач адекватних ММ процесів фільтрації у гетерогенних системах, які (моделі) враховують якісний прояв особливостей перебігу досліджуваних процесів. Важливою також є наукова задача розробки методів чисельної реалізації адекватних ММ процесів фільтрації у гетерогенних системах як самостійний аспект теорії і практики обчислювальної математики.

Таким чином, систематизація і аналіз даної області досліджень свідчать про те, що актуальною і не повною мірою вирішеною є науково-технічна задача розробки методологічних засад побудови систем моделювання процесів фільтрації з гетерогенними властивостями на основі модельної підтримки у вигляді варіаційних нерівностей з частинними похідними.

Зв'язок роботи з науковими програмами, темами, планами. Дисертаційна робота виконувалася у відповідності до пріоритетних напрямків науково-дослідних робіт Одеського національного політехнічного університету (ОНПУ), згідно координаційних планів Міністерства освіти і науки України, зокрема, в рамках наукових досліджень за держбюджетними науково-дослідними роботами (НДР): «Моделі складних технологічних об'єктів і процесів та апаратно-програмні засоби їх реалізації в системах управління» № 18-63, 2009 — 2012 р. р. (№ держ. реєстрації 0109U008452); «Моделі та інформаційні технології діагностування та управління складними динамічними об'єктами» № 80-63, 2013 — 2016 р. р. (№ держ. реєстрації 0113U007625).

Мета та задачі дослідження. Метою дисертаційного дослідження є створення моделей, методу чисельного моделювання процесів фільтрації у гетерогенних системах на основі застосування та розвитку апарату варіаційних нерівностей, а також у розробці комп'ютерно-орієнтованих інструментальних засобів моделювання, які забезпечують ефективне розв'язування прикладних задач при дослідженні і практичному використанні широкого класу природних та технологічних процесів і об'єктів.

Для досягнення поставленої мети дослідження в дисертаційній роботі поставлено та розв'язано наступні задачі:

— систематизувати і виділити особливості сукупності процесів фільтрації у гетерогенних та фрактально-гетерогенних системах на основі аналізу поширених природних та промислово важливих явищ дифузії у пористих середовищах (реології);

— виконати класифікацію процесів фільтрації у гетерогенних системах, базисними ознаками якої обрати особливості якісного перебігу фізичних явищ досліджуваних процесів;

— обґрунтувати підхід до математичної формалізації (опису) процесів дифузії у гетерогенних та фрактально-гетерогенних системах, заснований на використанні варіаційних нерівностей, спираючись на постановки прикладних задач моделювання процесами фільтрації у досліджуваних системах з урахуванням якісних проявів їх перебігу (зокрема, виражена спрямованість розвитку та наявність граничного градієнту, еволюційне обмеження на функцію стану, розривність коефіцієнтів тощо);

— розробити ММ процесів фільтрації в гетерогенних системах (у відповідності до виконаної класифікації) з представленням моделей як варіаційні нерівності у частинних похідних, довести існування та єдиність розв'язків відповідних нерівностей, а також виконати узагальнення запропонованих ММ, що дає змогу на уніфікованій основі розробити метод та інструментальні засоби їх реалізації;

— розробити чисельний метод обчислювальної реалізації ММ процесів фільтрації у гетерогенних системах, які враховують особливості якісного перебігу фізичних явищ цих процесів (виражена спрямованість розвитку, обмеженості функції стану різної природи тощо);

— розробити ММ процесів фільтрації у гетерогенних системах із самоподібною структурою (фрактально-гетерогенних систем) у класі варіаційних нерівностей у частинних похідних, які (моделі) відбивають властивості фрактальності як речовини, що здійснює фільтраційний рух, так і просторового середовища, де цей рух відбувається;

— розробити дискретні аналоги ММ процесів фільтрації у гетерогенних системах, які зберігають основні якісні властивості динаміки процесів, що досліджуються, а також алгоритми чисельної реалізації зазначених дискретних ММ;

— розробити ІПЗ, що реалізують запропоновані ММ та методи в рамках автоматизованого комплексу, та виконати оцінку прикладних можливостей цих ІПЗ на реальних прикладах.

Об'єкт досліджень — процеси моделювання явищ фільтрації в природних та технологічних гетерогенних системах;

Предмет досліджень — математичні моделі процесів фільтрації у гетерогенних (та фрактально-гетерогенних) системах і обчислювальний метод їх чисельної реалізації.

Методи досліджень. В дисертаційній роботі використано положення теорій: рівнянь математичної фізики; оптимального управління; чисельного аналізу; організації комп'ютерних засобів моделювання; обчислювального експерименту. Для підтвердження достовірності отриманих теоретичних результатів було застосовано комп'ютерне моделювання з використанням пакету Matlab (реквізити використаного пакету License number: 21808 Platform: All License option: Group Term: Perretual Use: Classroom).

Наукова новизна результатів, які виносяться на захист, полягає у наступному:

Вперше:

— розроблено математичні моделі процесів фільтрації у гетерогенних системах, які, на відміну від існуючих, враховують особливості перебігу фізичних явищ (зокрема, виражену спрямованість розвитку, вплив граничного градієнту тощо), що дозволяє підвищити якість моделювання, а також виконано узагальнення цих моделей;

— розроблено математичні моделі процесів фільтрації у гетерогенних системах із самоподібною структурою (фрактально-гетерогенних систем), які, на відміну від існуючих, дозволяють врахувати властивість фрактальності як самої речовини, що здійснює фільтраційний рух, так і просторового середовища, в якому цей рух відбувається, а також описати системи з реологічними ознаками, залежними від часових характеристик (наприклад, тиксотропних) або нелінійних ефектів (зокрема, коливаннями реологічних характеристик, пов'язаних із взаємодією структурних елементів), що забезпечує адекватність даних моделей у широкому класі досліджуваних процесів;

— сформульовано і доведено теореми існування та єдиності розв'язків варіаційних нерівностей з відповідними початковими та граничними умовами (суть — ММ досліджуваних процесів), які, на відміну від існуючих підходів до моделювання процесів фільтрації у гетерогенних системах, дозволяють виконати якісний аналіз запропонованих ММ, що забезпечує достовірність отримуваних розв'язків задачі моделювання.

Набув подальшого розвитку:

— метод обчислювальної реалізації ММ процесів фільтрації у гетерогенних системах, представлених на основі варіаційних нерівностей у частинних прохідних, який відрізняється врахуванням компонент гетерогенної системи різного фазового складу і ґрунтується на оптимізаційній процедурі принципу максимуму функції Гамільтона, що дозволяє розв'язувати задачі моделювання у випадках, коли шукані функції не обов'язково є «гладкими» функціями.

Практична цінність роботи полягає у тому, що запропоновані моделі, метод та засоби моделювання, дозволяють розширити клас важливих для практики задач дослідження і утилітарного використання процесів фільтрації у гетерогенних системах, а також створено комплекс інструментальних засобів для розв'язування прикладних задач моделювання (зокрема, визначення поточного динамічного стану або його прогнозу) в досліджуваних системах.

Застосування комплексу ІПЗ забезпечує скорочення часу моделювання в $(1{,}2\ldots1{,}4)$ за рахунок автоматизації процедур обчислювального процесу.

Результати, отримані в дисертаційній роботі, використано при розробці лекційних курсів (і відповідних циклів лабораторних робіт) з дисциплін: «Автоматизація типових виробничих процесів», «Автоматизація проектування систем управління», «Спеціальні розділи сучасної теорії управління», які поставлено і читаються на кафедрі комп'ютеризованих систем управління ОНПУ.

Особистий внесок здобувача. Всі наукові положення, висновки та рекомендації, які містяться у дисертаційній роботі та виносяться на захист, отримано здобувачем особисто і узагальнено при оформленні дисертації. Наукові праці [3, 4, 8, 9, 11] виконано автором особисто. В роботах, написаних у співавторстві [1, 2, 5 — 7, 10], автору належать вибір наукового напрямку, постановка задач та способи їх розв'язування, теоретичне обґрунтування методології та інтерпретація результатів досліджень. Зокрема, автору належать:

— в [1] — ММ фільтраційних процесів газонасичених ньютонівської та неньютонівської рідин в зоні тиску насичення;

— в [2] — ММ процесу стаціонарної фільтрації неньютонівських рідин у гетерогенному середовищі;

— в [5] — ММ процесу фільтрації з розривними коефіцієнтами у гетерогенних системах за умови неточних вхідних даних;

— в [6] — ММ процесу фільтрації у гетерогенних пластових системах;

— в [7] — ММ процесу фільтрації у гетерогенній системі з «проміжним агентом»;

— в [10] — інструментальні програмні засоби реалізації ММ фрактально-неоднорідних гетерогенних пластових систем.

Апробація результатів дисертаційної роботи. Основні положення та результати дисертаційної роботи доповідалися на наукових семінарах кафедри комп'ютеризованих систем управління ОНПУ, Одеса, 2014 — 2017 р. р.; на П'ятій Міжнародній науково-практичній конференції студентів і молодих науковців «Сучасні інформаційні технології 2015 (МІТ-2015)» (Одеса: ОНПУ, 2015 р.); на V Міжнародній науково-практичній конференції «Обробка сигналів і негаусівських процесів» (Черкаси: ЧДТУ, 2015 р.); на Шостій Міжнародній науково-практичній конференції студентів і молодих науковців «Сучасні інформаційні технології 2016 (МІТ-2016)» (Одеса: ОНПУ, 2016 р.); на ІІІ Міжнародної науково-практичної конференції Winter InfoCom 2016 (Київ: НТУУ «Київський політехнічний інститут» ім. Ігоря Сікорського, 2016 р.); на XVI Міжнародній науково-практичній конференції «Наука в современном мире» (Київ, 2017 р.).

Публікації. Основні наукові результати дисертаційної роботи викладено в 11 наукових роботах, в тому числі: 6 статтях, з яких 5 опубліковано у виданнях, включених до Переліку фахових видань України (всі видання індексуються у міжнародних науко метричних базах даних, зокрема: *Index Copernicus International, Ulrich's Periodicals Directory, Electronic Journals Library, Google Scholar*) та 1 — у зарубіжному виданні, а також у 5 тезах наукових конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, загальних висновків, списку використаної літератури зі 189 найменувань (на 20 сторінках), 5 додатків (на 27 сторінках), 8 рисунків та 5 таблиць. Загальний обсяг дисертаційної роботи складає 189 сторінок, в тому числі 143 сторінок основного тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Вступ містить загальну характеристику дисертаційної роботи; обґрунтування актуальності теми досліджуваної проблеми; мету і задачі дослідження; відомості про зв'язок обраного напрямку досліджень з планами наукових досліджень організації, де виконувалася робота. Визначено об'єкт та предмет дослідження, а також наукова новизна і практична цінність отриманих результатів; зазначено особистий внесок здобувача у роботах, виконаних у співавторстві; наведено відомості щодо апробації результатів дисертаційної роботи та вказано основні положення, які виносяться на захист.

У першому розділі «Стан проблеми математичного опису та машинних методів математичного моделювання процесів фільтрації у гетерогенних системах» наведено загальну характеристику процесів фільтрації у гетерогенних системах і особливості їх перебігу. Так, зокрема, на прикладі природних і технологічних рідин, які перебувають у пластових пористих середовищах, показано, що дані рідини являють собою багатофазні неоднорідні системи, які містять різноманітні включення та характеризуються нелінійною реологічною поведінкою. При цьому багатофазність та неоднорідність зумовлюють *гетерогенні* властивості рідин, що знаходяться у реологічних процесах — тобто у фільтраційному русі в пористих середовищах. Зазначено, що ефекти, які спостерігаються при фільтрації гетерогенних систем, відрізняються значною різноманітністю, що, в свою чергу, передбачає якісно відмінний вид законів фільтрації для них.

Аналітичне дослідження фільтрації багатофазних технологічних рідин у пористих середовищах (зокрема, високопарафіністих та газованих нафт) показало, що вони характеризуються поведінкою, притаманною для в'язкопластичних середовищ, основною особливістю яких є наявність початкового (або граничного) градієнту тиску. Закон фільтрації з початковим градієнтом відрізняється від загальновживаного в гідродинаміці в'язких рідин лінійного закону (відомого як закон Дарсі) і представляється у наступній формі

$$\varpi = \begin{cases} -(k/\mu)\times[(\partial P/\partial z)-G_0],\ (\partial P/\partial z)>G_0, \\ 0,\ (\partial P/\partial z)\le G_0, \end{cases} \qquad (1)$$

де ϖ — швидкість фільтрації; P — пластовий тиск; G_0 — граничний градієнт тиску; k та μ — відповідно проникність пористого середовища та в'язкість рідини, що фільтрується; z — незалежна просторова координата.

Однією з причин нелінійності закону фільтрації виду (1) є розділення фаз гетерогенної системи, що пояснюється дією принципу дисипації енергії.

До прояву гетерогенних властивостей процесу фільтрації можуть призводити нерівновагові в'язкопружні ефекти, прояв яких спостерігається у зсувних розрідженнях та згущеннях (відповідна зміна ефективної в'язкості), тобто має місце аномальне зростання опору плину у пористому середовищі.

В якості найважливішого прикладу гетерогенних систем розглянуто «газовані» рідини, гетерогенну поведінку яких зумовлено станом газової фази: докритичних зародків; зародкоутворення та розвинутої газової фази. Ступінь неоднорідності (гетерогенності) газованих рідин визначається насиченістю $S_г$ газової фази, яка впливає на динаміку процесу фільтрації.

Якісно новий напрямок теоретичних досліджень фільтрації гетерогенних систем пов'язано із впливом на реологічний процес фрактальних (самоподібних) структур. Цей вплив може здійснюватися за рахунок фрактальної структури пористого середовища або самої гетерогенної структури, що фільтрується. Показано, що у фрактально-гетерогенних системах перехід від лінійного закону фільтрації (закону Дарсі) до нелінійного (наприклад, виду (1)) у значному ступені залежить від розподілу пор середовища по розмірах — тобто фрактальності структури пористого середовища. Разом з тим гетерогенні рідини, зокрема, емульсії, мають динамічну фрактальну структуру, яка визначається взаємодією між частинками дисперсної фази.

Встановлено, що незалежно від фізичної природи, яка породжує гетерогенні властивості процесів фільтрації, останні, за умови впливу цих властивостей, супроводжуються нерівноваговими явищами (наприклад, наявністю граничного градієнту, зміною ефективної в'язкості тощо) і призводять до нелінійних ММ.

Аналіз поставлених і розв'язаних дотепер задач дослідження процесів фільтрації у гетерогенних системах показав, що адекватним способом їх математичної формалізації слід розглядати представлення ММ цих процесів на основі апарату варіаційних нерівностей у частинних похідних. Перспективним при цьому для розв'язування сформульованих задач на варіаційні нерівності є використання методів оптимізації.

На закінчення першого розділу зроблено висновок про те, що не вивченими залишаються питання формалізації динаміки процесів фільтрації у гетерогенних системах у випадках прояву нерівновагових ефектів, фрактальності структур гетерогенних систем, а також розробки методів їх математичного моделювання.

У другому розділі «Математичні моделі процесів фільтрації та метод їх обчислювальної реалізації» на прикладах природних та промислово значимих процесів фільтрації газорідинних сумішей (як найбільш поширених випадків гетерогенних систем) виконано *систематизацію задач* фільтрації (реології). В результаті виділено такі групи задач фільтрації гетерогенних систем в залежності від особливостей природи фізичного явища або математичної постановки задачі:

— підземної гідродинаміки для процесів фільтрації газованих вуглеводнів;

— динаміки розбавлених полімерних розчинів та ПАР в гетерогенних пористих середовищах, що зводяться до моделювання стаціонарної та нестаціонарної фільтрації неньютонівських (аномальних) газорідинних сумішей в гетерогенних середовищах;

— динаміки плину газованих рідин у докритичних областях, в тому числі псевдо скраплення газованими рідинами;

— фільтрації (реології) фрактально-гетерогенних систем з якісним проявом фізичних процесів (взаємодії часток дисперсної фази; фільтраційний плин суспензій; взаємозаміщення рідин, що фільтруються у фрактально-гетерогенному середовищі);

— динаміки хвильових процесів при вібровпливі на гетерогенну систему, в якій відбувається плин газорідинної суміші.

Виконана систематизація дала змогу виділити класифікаційні ознаки та послужила основою для подальшої *класифікації* газорідинних сумішей. При цьому визначено такі класи: за питомою вагою газової фази у суміші; за здатністю розчинності газової фази у суміші; за станом газової фази у суміші; за впливом граничного градієнта на реологію суміші. На підставі запропонованих систематизації та класифікації обґрунтовано підхід до математичної формалізації динаміки процесів фільтрації газорідинних сумішей, що передбачає застосування в якості адекватних ММ досліджуваних процесів апарат варіаційних нерівностей у частинних похідних, і який (підхід) поширено на загальну сукупність процесів фільтрації у гетерогенних системах.

В дисертаційній роботі, у відповідності до запропонованої класифікації, розроблено ММ процесів фільтрації газорідинних сумішей. Дані моделі розроблено на основі строгої математичної формалізації фізичних явищ, які визначають суть конкретного класу процесу фільтрації газорідинних сумішей і, як зазначено вище, ці моделі представлено у вигляді варіаційних нерівностей у частинних похідних.

Запропонований підхід до формалізації ММ на прикладі процесу, що визначається питомою вагою газової фази у суміші, для задачі відшукання функції внутрішньопластового тиску $u = u(t, z)$ полягає у наступному. Ефект впливу питомої ваги газової фази спостерігається переважно у процесах фільтрації при свердловинній розробці родовищ вуглеводнів (наприклад, газованих «легких» нафт та газового конденсату). Особливість процесу полягає в тому, що вміст газової фази в гетерогенній суміші залежить від швидкості фільтрації ϖ, причому, при збільшенні останньої питома вага газової фази також збільшується. Вплив газової фази та збільшення її питомої ваги спостерігається в зоні дії збурень — дебітів через добувні $K_{\text{д}_i}$, $i = \overline{1, N_{\text{д}}}$ або нагнітальні $K_{\text{н}_j}$, $j = \overline{1, N_{\text{н}}}$ свердловини (точки розташування останніх) і має *виражену спрямованість* — в залежності від знаку дебіту ($Q_{\text{д}_i}$ або $Q_{\text{н}_j}$) через свердловину.

Нехай область Ω, що визначає геометрію родовища (продуктивного пласта), являє собою відкриту пласку обмежену просторову область в $\Re^n$, $n = \overline{1, 2}$ з границею Γ, а $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \Gamma$ задає замкнення Ω. Пласт розкрито системою l продуктивних свердловин $K_{\text{пр}_l} = K_{\text{д}_i} + K_{\text{н}_j}$, $l = \overline{1, (N_{\text{д}} + N_{\text{н}})}$. Дебіти цих свердловин $Q_{\text{д}_i}$ $(i = \overline{1, N_{\text{д}}})$ та $Q_{\text{н}_j}$ ($j = \overline{1, N_{\text{н}}}$) визначають дію зовнішньої примусової сили $f(z)$. Кожна з l продуктивних свердловин характеризується зоною впливу (в межах вираженого газоутворення) у вигляді просторової області Ω_l з границею Γ_l.

Функція стану в областях Ω_l являє собою забойний тиск $u_{\text{зб}_l}(z)$ і визначається для добувних $K_{\text{д}_i}$ та нагнітальних $K_{\text{н}_j}$ свердловин як

$$u^{\text{д}}_{\text{зб}_i}(z) \le u(t, z);\ i = \overline{1, N_{\text{д}}},\ \ u^{\text{н}}_{\text{зб}_j}(z) > u(t, z);\ j = \overline{1, N_{\text{н}}}, \tag{2}$$

де $u(t, z)$ — функція пластового тиску поза забойних зон продуктивних свердловин.

Шукана функція $u = u(t, z)$ — гармонійна функція в Ω, неперервна на $\overline{\Omega}$ і являє собою розв'язок задачі динаміки

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_k}\left[\left(\frac{k_{\text{ф}}}{\mu_{\text{ф}}\, B_{\text{ф}}} + \frac{k_{\text{г}}}{\mu_{\text{г}}\, B_{\text{г}}}\right) \cdot \frac{\partial u(t, z)}{\partial z_k}\right] = \sum_{l=1}^{N_{\text{д}}+N_{\text{н}}} \frac{|Q_l|}{B_{\text{ф}}};\ \ l = \overline{1, (N_{\text{д}} + N_{\text{н}})}, \tag{3}$$

з початковими (ПУ)

$$u(t, z)\big|_{t=0} = u(z) \tag{4}$$

та граничними умовами (ГУ)

$$\frac{\partial u(t, z)}{\partial \eta} \le 0,\ \ \left[u^{\text{д}}_{\text{зб}_i}(z) - u(t, z)\right]\Big|_{z \in \Gamma_i} \le 0;\ \ i = \overline{1, N_{\text{д}}}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u(t,z)}{\partial \eta} > 0\,, \quad \left[u^{\text{н}}_{\text{зб}_j}(z) - u(t,z)\right]\Big|_{z\in\Gamma_j} > 0\,; \quad j=\overline{1,N_{\text{н}}}\,, \tag{6}$$

де $k_{\text{ф}}$, $k_{\text{г}}$ — проникності фаз; $\mu_{\text{ф}}$, $\mu_{\text{г}}$ — в'язкості фаз; $B_{\text{ф}}$, $B_{\text{г}}$ — об'ємні коефіцієнти фаз (індекси «ф» та «г» — відповідно рідка та газова фази суміші); η — нормаль до границі Γ_l.

Введемо у розгляд пробну функцію v, визначену на просторі Соболєва $H^1(\Omega)$. Помножимо скалярно рівняння динаміки (3) на $(v-u)$ і, скориставшись формулою Гріна, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k_{\text{ф}}}{\mu_{\text{ф}}\,B_{\text{ф}}}+\frac{k_{\text{г}}}{\mu_{\text{г}}\,B_{\text{г}}}\right)\left[\frac{\partial u}{\partial z_k}\cdot\frac{\partial (v-u)}{\partial z_k}\right]\right\}dz-\int\limits_{\Gamma}\left[\sum_{l=1}^{N_{\text{д}}+N_{\text{н}}}\left(\frac{k_{\text{ф}}}{\mu_{\text{ф}}\,B_{\text{ф}}}+\frac{k_{\text{г}}}{\mu_{\text{г}}\,B_{\text{г}}}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \eta_l},v-u\right)\right]d\Gamma=\sum_{l=1}^{N_{\text{д}}+N_{\text{н}}}\frac{|Q_l|}{B_{\text{ф}}} \tag{7}$$

для будь-якої $v \ge 0$ на Γ_l, $l=\overline{1,(N_{\text{д}}+N_{\text{н}})}$.

Таким чином, в якості опуклої множини K припустимих функцій може бути обрана множина невід'ємних v таких що $K=\left\{v\in H^1(\Omega)\,\middle|\,v\ge 0 \text{ м. с на } \Gamma_l\right\}$, $l=\overline{1,(N_{\text{д}}+N_{\text{н}})}$.

З (5), (6) відповідно витікає, що

$$\int\limits_{\Gamma}\zeta\left\{\sum_{i=1}^{N_{\text{д}}}\left[\frac{\partial u}{\partial \eta_i}\left(u^{\text{д}}_{\text{зб}_i}-u\right)\right]\right\}d\Gamma \le 0\,, \quad \int\limits_{\Gamma}\zeta\left\{\sum_{j=1}^{N_{\text{н}}}\left[\frac{\partial u}{\partial \eta_j}\left(u^{\text{н}}_{\text{зб}_j}-u\right)\right]\right\}d\Gamma > 0\,, \tag{8}$$

де ζ — пропускна здатність границь Γ_l, $l=\overline{1,(N_{\text{д}}+N_{\text{н}})}$ (в межах пласта розглядається однаковою).

Введемо зміну змінної v на $(-v)$ і, з урахуванням (8), вираз (7) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\Omega}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k_{\text{ф}}}{\mu_{\text{ф}}\,B_{\text{ф}}}+\frac{k_{\text{г}}}{\mu_{\text{г}}\,B_{\text{г}}}\right)\left[\frac{\partial u}{\partial z_k}\cdot\frac{\partial (v-u)}{\partial z_k}\right]\right\}dz-\int\limits_{\Gamma}\left\{-\sum_{i=1}^{N_{\text{д}}}\frac{\partial u}{\partial \eta_i}v+\zeta\left\{\sum_{i=1}^{N_{\text{д}}}\left[\frac{\partial u}{\partial \eta_i}\left(u^{\text{д}}_{\text{зб}_i}-u\right)\right]\right\}\right\}d\Gamma-\\&-\int\limits_{\Gamma}\left\{\sum_{i=1}^{N_{\text{д}}}\frac{\partial u}{\partial \eta_i}u+\zeta\left\{\sum_{i=1}^{N_{\text{д}}}\left[\frac{\partial u}{\partial \eta_i}\left(u^{\text{д}}_{\text{зб}_i}-u\right)\right]\right\}\right\}d\Gamma-\int\limits_{\Gamma}\left\{-\sum_{j=1}^{N_{\text{н}}}\frac{\partial u}{\partial \eta_j}v+\zeta\left\{\sum_{j=1}^{N_{\text{н}}}\left[\frac{\partial u}{\partial \eta_j}\left(u^{\text{н}}_{\text{зб}_j}-u\right)\right]\right\}\right\}d\Gamma-\\&-\int\limits_{\Gamma}\left\{\sum_{j=1}^{N_{\text{н}}}\frac{\partial u}{\partial \eta_j}u+\zeta\left\{\sum_{j=1}^{N_{\text{н}}}\left[\frac{\partial u}{\partial \eta_j}\left(u^{\text{н}}_{\text{зб}_j}-u\right)\right]\right\}\right\}d\Gamma=\sum_{l=1}^{N_{\text{д}}+N_{\text{н}}}\frac{|Q_l|}{B_{\text{ф}}}.\end{aligned} \tag{9}$$

Визначимо білінійну форму

$$a(u,v-u)-\int\limits_{\Omega}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k_{\text{ф}}}{\mu_{\text{ф}}\,B_{\text{ф}}}+\frac{k_{\text{г}}}{\mu_{\text{г}}\,B_{\text{г}}}\right)\left[\frac{\partial u}{\partial z_k}\cdot\frac{\partial (v-u)}{\partial z_k}\right]\right\}dz \tag{10}$$

та функціонали

$$\mathbf{j}(v)=-\int\limits_{\Gamma}\left\{-\sum_{i=1}^{N_{\text{д}}}\frac{\partial u}{\partial \eta_i}v+\zeta\left\{\sum_{i=1}^{N_{\text{д}}}\left[\frac{\partial u}{\partial \eta_i}\left(u^{\text{д}}_{\text{зб}_i}-u\right)\right]\right\}\right\}d\Gamma-\int\limits_{\Gamma}\left\{-\sum_{j=1}^{N_{\text{н}}}\frac{\partial u}{\partial \eta_j}v+\zeta\left\{\sum_{j=1}^{N_{\text{н}}}\left[\frac{\partial u}{\partial \eta_j}\left(u^{\text{н}}_{\text{зб}_j}-u\right)\right]\right\}\right\}d\Gamma\,, \tag{11}$$

$$\mathbf{j}(u)=-\int\limits_{\Gamma}\left\{\sum_{i=1}^{N_{\text{д}}}\frac{\partial u}{\partial \eta_i}u+\zeta\left\{\sum_{i=1}^{N_{\text{д}}}\left[\frac{\partial u}{\partial \eta_i}\left(u^{\text{д}}_{\text{зб}_i}-u\right)\right]\right\}\right\}d\Gamma-\int\limits_{\Gamma}\left\{\sum_{j=1}^{N_{\text{н}}}\frac{\partial u}{\partial \eta_j}u+\zeta\left\{\sum_{j=1}^{N_{\text{н}}}\left[\frac{\partial u}{\partial \eta_j}\left(u^{\text{н}}_{\text{зб}_j}-u\right)\right]\right\}\right\}d\Gamma\,. \tag{12}$$

Тоді остаточно запишемо варіаційну нерівність, яка описує процес, що визначається питомою вагою газової фази у газорідинній суміші:

$$u \in K: \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v-u \right) - a(u, v-u) + \mathbf{j}(v) - \mathbf{j}(u) \geq \sum_{l=1}^{N_д + N_н} \frac{|Q_l|}{B_ф} \quad \forall v, u \in K \,. \qquad (13)$$

Таким чином, задача визначення функції $u = u(t, z)$ в продуктивному пласті в означеній вище задачі зведено до постановки у вигляді варіаційної нерівності, яка враховує також нерівності у ГУ, що були у вихідній системі (3) — (6).

Для коректного розв'язання задачі в постановці у вигляді варіаційної нерівності, строго доведено існування та єдиність розв'язку (13).

У зв'язку з цим сформулюємо та доведемо наступні теореми 2.1 та 2.2.

Теорема 2.1. Нехай зовнішня примусова сила задовольняє умові $f = \left(\sum_{l=1}^{N_д + N_н} \frac{|Q_l|}{B_ф} \right) \in H^1(\Omega)$. Тоді існує невироджений розв'язок задачі (13), який відповідає трійці (a, K, f).

При доведенні теореми 2.1 показано, що якщо $u \in \dot{T}^{1,q}(v, \Omega)$, де $\dot{T}^{1,q}(v, \Omega)$ — множина всіх функцій $u : \Omega \to \Re$ для яких виконується $T_k(u) \in \dot{W}^{1,q}(v, \Omega)$ ($\dot{W}^{1,q}(v, \Omega)$ — банановий простір функцій з компактним носієм q; $\forall k > 0$), то має місце

$$\langle a\, u, T_k(u-v) \rangle = \langle a\, T_{k_1}(u-v), T_k(u-v) \rangle .$$

Тоді з останньої рівності витікає, що виконується умова

якщо $v \in K \cap L^{\infty}(\Omega)$ і $k_1 = k + \|v\|_{L^{\infty}(\Omega)}$, то $\langle a T_{k_1}(u-v), T_k(u-v) \rangle \leq \int_{\Omega} f\, T_k(u-v)\, dz$.

Таким чином, u є розв'язком (строго — T-розв'язком) задачі (13), який відповідає трійці (a, K, f), причому, цей розв'язок нетривіальний, оскільки множина функцій $\dot{T}^{1,q}(v, \Omega)$ визначена на всій множині K .

Теорема 2.2. Для білінійної форми (10) та функціоналів виду (11), (12) розв'язок задачі (13) — єдиний.

У доведенні теореми 2.2 використано властивість коерцитивності білінійної форми $a(u, v-u)$. З визначення функцій u та v випливає $\|v-u\| \to 0$. Показано, що якщо u_1 та u_2 — розв'язки задачі (13), відповідно для $f_1, f_2 \in H^1(\Omega)$, то, внаслідок коерцитивності білінійної форми $a(u, v-u)$, існує таке $\delta > 0$ при якому виконується нерівність

$$\delta \|u_1 - u_2\| + \mathbf{j}(u_1 - u_2) \leq \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle \leq \|f_1 - f_2\|_{H^1(\Omega)} \|u_1 - u_2\|$$

і випливає справедливість умови

$$\|u_1(t,z) - u_2(t,z)\| \leq \left(\frac{1}{\alpha} \right) \|f_1(t,z) - f_2(t,z)\|_{H^1(\Omega)} ,$$

тобто єдиність розв'язку задачі (13).

Аналогічним чином одержано ММ для інших класів газорідинних сумішей у вигляді відповідних варіаційних нерівностей, для яких також строго доведено існування та єдиність розв'язків.

Тотожність структур варіаційних нерівностей, які представляють ММ досліджуваних процесів фільтрації, дозволила виконати узагальнення їх математичного опису. Таке узагальнення дозволяє, з одного боку — описати будь-який конкретний процес фільтрації у гетерогенній системі, що має місце в прикладних задачах, а з другого боку — розробити достатньо загальний метод обчислювальної реалізації одержуваних варіаційних нерівностей (відповідних ММ).

Узагальнену ММ процесів фільтрації у гетерогенних системах записано відносно функції $\Psi = \Psi(t,z)$, яка є фізичною величиною, що визначає простір стану досліджуваного процесу в конкретній задачі, наприклад, тиск, насиченість, концентрацію тощо. Функцію $\Psi = \Psi(t,z)$ визначено на обмеженій відкритій множині Q простору $\Re^n$, $n = \overline{1,2}$ з гладкою границею Γ і в інтервалі часу $(0,t_k)$ для $t_k < \infty$, $Q = (0,t_k)\times\Omega$, $\Sigma = (0,t_k)\times\Gamma$ і вона є розв'язком варіаційної нерівності

$$\Psi \in K:\ \left[m(z)\frac{\partial\Psi}{\partial t}, v-\Psi\right] + a(\Psi, v-\Psi) + \mathbf{j}(v) - \mathbf{j}(\Psi) \ge (f, v-\Psi);\quad \forall v,\Psi \in H^1(\Omega) \tag{14}$$

з ПУ

$$\Psi(t,z)\big|_{t=0} = \Psi_0(z) \tag{15}$$

та ГУ (типа Діріхлє або Неймана)

$$\begin{cases} \Psi(t,z) = \psi(t,z);\ z\in\Gamma, \\ \dfrac{\partial\Psi(t,z)}{\partial\eta} = \xi(t,z);\ \eta - \text{нормаль до } \Gamma, \end{cases} \tag{16}$$

де $f(\cdot)$ — примусова сила процесу (являє собою функцію незалежних часової або просторової змінних), для якої операція $(f, v-\Psi)$ співпадає зі скалярним добутком в $L^2(\Omega)$, тобто $(f, v-\Psi) = \int\limits_\Omega [f(z), v-\Psi]\,dz$ або $(f, v-\Psi) = \int\limits_\Gamma [f(z), v-\Psi]\,d\Gamma$; $\mathbf{j}(v)$, $\mathbf{j}(\Psi)$ — опуклі функціонали, що зумовлюють вид фізичного процесу фільтрації, і які може бути визначено або на границі Γ просторової області Ω або всередині неї

$$\mathbf{j}(\cdot) = \int\limits_\Gamma \varphi(\Psi,z)\lambda(\Psi,\Psi_{зовн})\,d\Gamma;\quad \mathbf{j}(\cdot) = \int\limits_\Omega \varphi(\Psi,z)\lambda(\Psi,\Psi_{зовн})\,dz, \tag{17}$$

де $\varphi(\Psi,z)$ — певна неперервна функція, в якості аргументів якої, окрім незалежної просторової координати, може виступати шукана функція; $\lambda(\Psi,\Psi_{зовн})$ — неперервна, така, що диференціюється (або не володіє властивістю диференціюватися), функція від шуканої функції (або функції тієї ж фізичної природи, але заданої поза просторовою областю $\overline{\Omega} = \Omega\bigcup\Gamma$), а також функції іншої фізичної природи); $\psi(t,z)$, $\xi(t,z)$ — невід'ємні функції на границі Γ просторової області Ω, які визначають напрям та якісну картину перебігу фізичного процесу на границі Γ.

Нетривіальний розв'язок задачі (14) — (16) визначається виглядом функціоналів (17), зокрема, функцій $\varphi(\Psi,z)$ та $\lambda(\Psi,\Psi_{зовн})$.

Реалізацію запропонованих ММ процесів фільтрації у гетерогенних системах здійснено на основі виконаної в дисертаційній роботі модифікації методу максимуму функції Гамільтона (МФГ). Процедура модифікованого методу МФГ виглядає наступним чином. Вихідна задача (задля збереження загальності розгляду, модифікацію методу МФГ представлено, спираючись на узагальнену ММ виду (14) — (16)) зводиться до еквівалентної форми

$$\Psi(t,z)\in K:\ \left[m(z)\frac{\partial\Psi(t,z)}{\partial t}, v(t,z)-\Psi(t,z)\right] + a[\Psi(t,z), v(t,z)-\Psi(t,z)] + \phi[v(t,z)] - \phi[\Psi(t,z)] -$$

$$-\{\theta[\Psi(t,z), v(t,z)], [v(t,z)-\Psi(t,z)]\} = \{[f, v(t,z)-\Psi(t,z)], \{\theta[\Psi(t,z), v(t,z)],$$

$$[v(t,z)-\Psi(t,z)]\}\} \geq 0\,; \quad \Psi(t,z)\big|_{t=0} = \Psi_0(z), \quad \forall v, \Psi \in K\,, \tag{18}$$

де $\theta[\Psi(t,z), v(t,z)] \in L^{\infty}(Q)$, $Q = (0, t_k) \times \Omega$ та по структурі відповідає алгебраїчній сумі функціоналів $\mathrm{j}(\cdot)$ (співвідношення (17)), а $\phi[\cdot] \equiv \mathrm{j}[\cdot]$.

Вводиться критерій якості розв'язку (відповідно, якщо задача розглядається на границі Γ області Ω або в її середині)

$$J = \min_v \int_\Gamma \int_0^T \left| v(t,z) - \Psi(t,z) \right| dt\, d\Gamma \quad \text{або} \quad J = \min_v \int_\Omega \int_0^T \left| v(t,z) - \Psi(t,z) \right| dt\, dz\,. \tag{19}$$

Фізичний смисл підінтегральних виразів в (19) вочевидь являє собою кількісну міру відхилення обчисленого значення функції стану процесу фільтрації від її реального значення.

Для відшукання умов оптимальності критерію (19) здійснюється процедура розширення простору стану для фізичної системи, в якій розглядається процес фільтрації, а також вводиться голчаста варіація $\delta\tilde{v}$ тривалістю ε, що дозволяє визначити прирощення δJ функціонала (19). Для виконання умови рівності нулю $\delta J = 0\big|_{t=t_k}$ вводиться зведена функція $\tilde{p} = \tilde{p}(t,z)$ відповідно до виразу (знак тильда позначає розширений вектор простору стану)

$$\frac{\partial \tilde{p}_i(t,z)}{\partial t} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial \left\{\left\{a\left[\tilde{\Psi}_i(t,z_i)\right]\tilde{\Psi}_i(t,z_i), \tilde{\Psi}_i(t,z_i)\right\} + \phi\left[\tilde{\Psi}_i(t,z_i)\right] - \left[f, \tilde{\Psi}_i(t,z_i)\right]\right\}}{m(z_i) \times \partial \tilde{v}_i(t,z_i)}\, \tilde{p}_i(t,z_i), \quad i = \overline{0,\, n}\,, \tag{20}$$

причому функцію $\tilde{p}(t,z)$ виражено через шукану функцію $\Psi(t,z)$.

Для забезпечення мінімуму функціоналам (19) варіація $\delta\tilde{v}$ в момент часу $t = t_k$ повинна дорівнювати нулю, тобто $-\delta J_{t=t_k} = \left\langle \delta\tilde{v}(t,z), \tilde{p}(t,z) \right\rangle_{t=t_k} = 0$, що, з урахуванням виразу для динаміки, приводить до результату

$$\Big\langle \left\{\left\{a\left[\tilde{\Psi}(t,z)\right], \tilde{v}(t,z) - \tilde{\Psi}(t,z)\right\} + \phi\left[\tilde{v}(t,z)\right] - \phi\left[\tilde{\Psi}(t,z)\right] - \left\{\theta\left[\tilde{\Psi}(t,z), \tilde{v}(t,z)\right], \left[\tilde{v}(t,z) - \tilde{\Psi}(t,z)\right]\right\} - \right.$$

$$\left. - \left[f, \tilde{v}(t,z) - \tilde{\Psi}(t,z)\right]\right\}, \tilde{p}(t,z) \Big\rangle_{t=\tau} -$$

$$\left\langle \left\{a\left[\tilde{\Psi}(t,z)\right], \tilde{v}(t,z) - \tilde{\Psi}(t,z)\right\} + \phi\left[\tilde{v}(t,z)\right] - \left[f, \tilde{\Psi}(t,z) - \tilde{\Psi}(t,z)\right], \tilde{p}(t,z) \right\rangle_{t=\tau} = 0\,. \tag{21}$$

Аналіз (21) показує, що другий доданок в ньому відповідає оптимальному розв'язку для виразу динаміки (18). Якщо оптимальний розв'язок $\Psi(t,z)$, який відповідає мінімуму одного з критеріїв (19), віднайдено, то прирощення $\delta J = 0$. Враховуючи це, перший доданок в (21), що відповідає функції Гамільтона

$$\tilde{H} = \Big\langle \left\{\left\{a\left[\tilde{\Psi}(t,z)\right], \tilde{v}(t,z) - \tilde{\Psi}(t,z)\right\} + \phi\left[\tilde{v}(t,z)\right] - \phi\left[\tilde{\Psi}(t,z)\right] - \right.$$

$$\left. - \left\{\theta\left[\tilde{\Psi}(t,z), \tilde{v}(t,z)\right], \left[\tilde{v}(t,z) - \tilde{\Psi}(t,z)\right]\right\} - \left[f, \tilde{v}(t,z) - \tilde{\Psi}(t,z)\right]\right\}, \tilde{p}(t,z) \Big\rangle\,, \tag{22}$$

повинен приймати максимальне значення. Забезпечення максимуму функції Гамільтона визначається умовами

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial v_i(t,z_i)} = 0\,; \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta_i(t,z_i)} = \tilde{p}_i(t,z_i)\,; \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_i(t,z_i)} = \left[m(z_i)\frac{\partial \tilde{\Psi}_i(t,z_i)}{\partial t}, \tilde{v}_i(t,z_i) - \tilde{\Psi}_i(t,z_i) \right], \quad i = \overline{0,\, n}\,. \tag{23}$$

В дисертаційній роботі розроблено алгоритм чисельного розв'язування задачі (13) на основі модифікованого методу МФГ.

Запропоновані ММ процесів фільтрації у гетерогенних системах, представлені відповідними варіаційними нерівностями у частинних похідних; сформульовані та доведені теореми щодо існування та єдності розв'язків останніх, та модифікований метод МФГ їх (нерівностей) розв'язування відповідають *першому*, *третьому* і *четвертому* пунктам наукової *новизни* чинної дисертаційної роботи.

У третьому розділі «**Математичні моделі та засоби математичного моделювання процесів фільтрації у фрактально-гетерогенних системах**» досліджено питання впливу явища утворення *фрактальних* (самоподібних) структур на процеси фільтрації (реології) у гетерогенних системах.

Аналіз показав, що цей вплив може визначатися як властивостями фрактальності самої субстанції, що здійснює фільтраційний рух (наприклад: багатофазних рідин, що не змішуються; емульсій; суспензій тощо), так і просторової області, в якій відбувається процес фільтрації. Також в ході аналізу показано, що важливим фактором фізичної картини фільтрації гетерогенних систем у фрактально-неоднорідних (тобто фрактально-гетерогенних) середовищах є те, що при зменшенні взаємодії між частинками (внаслідок зниження концентрації дисперсної фази), фрактальна структура системи зникає. На підставі цього зроблено висновок, що процес фільтрації у фрактально-гетерогенних системах носить виражений спрямований характер, а адекватним для його математичної формалізації (тобто складанні ММ) можна розглядати апарат варіаційних нерівностей.

Розроблено ММ процесів фільтрації у фрактально-гетерогенних системах на прикладі типового випадку реології багатофазних рідин, що не змішуються. За ознаку фрактальності процесу фільтрації при цьому було розглянуто умову «гладкості» фронту поділу фаз, яка визначалася по «стрибку» насиченості в функції Баклея-Леверета (для двофазної рідини)

$$J(S) = \frac{k_1^0(S_1)}{\mu_1 k_1^0(S_1) + \mu_2 k_2^0(S_2)}, \qquad (24)$$

де $k_1^0(S_1)$ та $k_2^0(S_2)$ — відносні фазові проникності компонент, які фільтруються; μ_1 та μ_2 — їх в'язкості; S_1 та S_2 — насиченості пористого простору компонентами, що фільтруються, відповідно. Фізично порушення «гладкості» фронту поділу та виникнення фрактально-гетерогенної структури процесу спричиняється значною відмінністю швидкостей фільтрації ϖ_i $(i = 1,2)$ фаз та наявністю граничного градієнта G, який зумовлює відсутність просування фронту поділу фаз за ненульового значення внутрішньопластового тиску $u = u(t,z)$.

При математичній формалізації вважалося, що за умови «гладкості» фронту поділу фаз (визначеного за виразом (24)) фрактальна структура процесу фільтрації відсутня. В іншому випадку «гладкість» фронту порушується, а потік, що фільтрується, набуває фрактально-гетерогенну структуру зі «складним» фронтом поділу фаз. Для двофазної рідини ($j = 1,2$) динаміку фільтраційного руху з урахуванням функції Баклея-Леверета та впливу граничного градієнта G може бути представлено наступною системою (параметри у функцій опущено)

$$(-1)^j \frac{m\,\partial S_j}{\partial t} - \frac{k_j(S_j)}{\mu_j} J(S_j)\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_i}\left[\frac{\partial u}{\partial z_i} - \frac{du_c}{dS_j} - G_j\left(\left|\frac{\partial u}{\partial z_i}\right|\right)^{-1}\right]\right\} = \frac{1}{h} Q_j\,, \qquad (25)$$

де u_c — капілярний тиск, зумовлений відмінністю швидкостей фільтрації ϖ_i ($i = 1, 2$); h — товщина реологічного пласта («потужність» пласта).

Початкові та граничні умови приймуть вигляду

$$S_j(0,z)\big|_{z\in\Omega} = S_{j_0}(z);\;\; u(0,z)\big|_{z\in\Omega} = u_0(z);\;\; j = 1, 2\,, \qquad (26)$$

$$(\partial u/\partial \eta)\big|_{L\in\Gamma} > 0\,;\;\; (\partial S_j/\partial \eta)\big|_{L\in\Gamma} > 0\,;\;\; (\partial u_c/\partial \eta)\big|_{L\in\Gamma} > 0\,,\;\; j = 1, 2\,. \qquad (27)$$

Введемо до розгляду пробні функції $v_j = v_j(t,z)$, за фізичною природою аналогічними функціям насиченості $S_j = S_j(t,z)$, $j = 1, 2$ і визначених на множині K: $\forall v \in K,\, K = \{v | v \ge 0$ майже скрізь в $\Omega\}$. Скалярно помножимо рівняння системи (25) відповідно на $(v - S_1)$ та $(v - S_2)$. Далі, застосувавши, до перетворених рівнянь (25) функцію Гріна, отримаємо (знак тильда позначає збурення відповідних величин)

$$\left[(-1)^j \frac{m\;\partial S_j}{\partial t}, (v - S_j)\right] - \int\limits_{\Omega} \frac{k_j(S_j)}{\mu_j} J(S_j)\left\{\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \tilde u}{\partial z_i}\left[\frac{\partial \tilde u}{\partial z_i} - \frac{d\tilde u_c}{dS_j}\frac{\partial S_j}{\partial z_i} - G_j\left(\left|\frac{\partial \tilde u}{\partial z_i}\right|\right)^{-1}\right]\frac{\partial (v - S_j)}{\partial z_i}\right\} dz_i =$$

$$= \frac{1}{h} Q_j, (v - S_j) + \int\limits_{\Gamma}\left[\frac{\partial S_j}{\partial \eta}, (v - S_j)\right] d\Gamma\,,\;\; \forall\, v, S_j \in K\,,\;\; j = 1, 2\,. \qquad (28)$$

Визначимо білінійну форму

$$a[\tilde u, (v - S_j)] = \int\limits_{\Omega}\left[\frac{k_j(S_j)}{\mu_j} J(S_j)\sum_{i=1}^{2} \frac{d\tilde u_c}{dS_j}\frac{\partial S_j}{\partial z_i}\frac{\partial (v - S_j)}{\partial z_i}\right] dz \qquad (29)$$

і функціонали

$$\mathbf{j}(v) = \int\limits_{\Omega}\left[\frac{k_j(v_j)}{\mu_j} J(v_j)\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 \tilde u}{\partial z_i^2} - G_j\left(\left|\frac{\partial \tilde u}{\partial z_i}\right|\right)^{-1}\right] dz\,,\;\; \mathbf{j}(S) = \int\limits_{\Omega}\left[\frac{k_j(S_j)}{\mu_j} J(S_j)\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 \tilde u}{\partial z_i^2} - G_j\left(\left|\frac{\partial \tilde u}{\partial z_i}\right|\right)^{-1}\right] dz\,. \qquad (30)$$

Тоді, в результаті очевидних перетворень, приходимо до наступної системи варіаційних нерівностей у частинних похідних

$S_j \in K$:

$$\left[(-1)^j \frac{m\,\partial S_j}{\partial t}, (v - S_j)\right] - a[\tilde u, (v - S_j)] - \mathbf{j}(v_j) + \mathbf{j}(S_j) \ge \left[\frac{1}{h} Q_j, (v - S_j)\right];\;\; \forall\, v_j, S_j \in K\,,\;\; j = 1, 2\,. \qquad (31)$$

Отримана система варіаційних нерівностей вигляду (31), доповнена початковими (26) та граничними (27) умовами являє собою ММ процесу фільтрації у фрактально-гетероегнних системах.

В дисертаційній роботі отримано вираз для *фрактальної розмірності* — основної характеристики фрактальної структури, яка дозволяє математично представити останню як систему з дробовою розмірністю, що геометрично поєднує фрактальні *кластери* (або *агрегати*)

$$L = a(R/a)^D\,, \qquad (32)$$

де L — лінійний розмір елемента фрактальної структури, наприклад, збуреної частини фронту поділу фаз (по прямій); a — розмір ланки ломаної лінії (усереднений розмір «зерна» пористого простору); R — розмір фрактального кластера (радіус сфери, яка охоплює елемент фрактальної структури); D — фрактальна розмірність, що забезпечує для кластера певну область масштабів, в якій виконується апроксимація виду (32).

Запропоновано ММ процесу фільтрації у фрактально-гетерогенних системах з урахуванням часток дисперсної фази, в якій, на відміну від ММ виду (31), (26), (27), враховано реологічні властивості, що залежать від часу (тиксотропні системи) або нелінійні ефекти (наприклад, коливання реологічних характеристик, яке викликано взаємодією структурних елементів). При цьому тиксотропні та нелінійні ефекти враховано введенням у вирази динаміки (система (25)) постійної та змінної складових густини фрактально-гетерогенної системи

$$\mu_j = \mu_{j_0} + \mu_{j_1}(C_2/C_1); \quad j = 1, 2 , \tag{33}$$

де μ_{j_0}, $\mu_{j_1}(C_2/C_1)$ — відповідно постійна та змінна складові в'язкості системи; C_1, C_2 — концентрації часток, які не руйнуються за будь-яких обставин та тих, що утворюються в результаті агрегації внаслідок властивості фрактальності.

ММ процесів фільтрації у фрактально-гетерогенних системах представлено в класі варіаційних нерівностей у частинних похідних та орієнтовано на реалізацію на основі модифікованого методу МФГ. Дані моделі складають *другий пункт наукової новизни* чинної дисертаційної роботи.

Показано можливість врахування розривності коефіцієнтів та неточності вхідних даних при моделюванні процесів фільтрації у фрактально-гетерогенних системах, що представлено та сформульовано як некоректно поставлену задачу. Розв'язання даної задачі здійснено на основі проекційного методу Гальоркіна, в якому базисна (координатна) система функцій співпадає з проекційною системою. При цьому в якості базисних функцій прийнято багатомірні вейвлети.

У четвертому розділі «Комп'ютерні засоби та практика їх застосування при розв'язуванні задач моделювання процесів фільтрації у гетерогенних системах» розроблено комп'ютерні засоби розв'язування задач моделювання процесів фільтрації у гетерогенних системах. Використовуючи комплекс як інструментальну базу, на прикладних задачах показано застосування запропонованих ММ та методу їх чисельної реалізації в умовах реальних об'єктів.

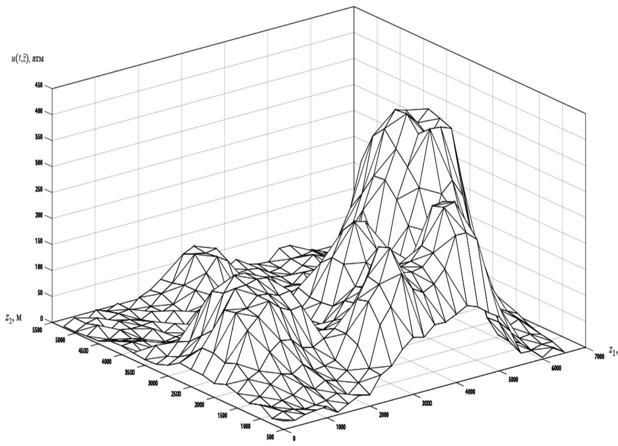
Комплекс являє собою користувацький додаток, розроблений на платформі пакету Matlab і дозволяє формалізувати задачу моделювання певного процесу фільтрації у гетерогенній системі. При цьому ММ конкретного процесу фільтрації формується в класі відповідних операторів у частинних похідних.

Геометрія просторової області моделювання Ω формується за принципом конструктивної блокової геометрії — CDSG (constructive block solid geometry), який реалізується засобами Matlab при завданні складних просторових областей. Відповідно до даного принципу складна область Ω представляється як об'єднання, перетин або різниця геометричних примітивів Ω_j (де j — число типових областей) зі стандартним програмним забезпеченням конструювання геометричних форм.

Виходячи з фізики задач моделювання процесів фільтрації у гетерогенних системах, що розв'язуються, можливими типами граничних умов (ГУ) для них є: завдання функції (потенціалу) на границі (ГУ 1 роду, або типу Діріхлє) та завдання потоку через границю (ГУ 2 роду, або типу Неймана).

Граничні (ГУ) та початкові (ПУ) умови формуються у вигляді добутку відповідних нормованих значень та вагових коефіцієнтів і можуть бути перевизначені на будь-якому етапі підготовки розв’язку задачі перед інтегруванням.

Запропоновані в дисертаційній роботі ММ, чисельний методи і алгоритми, що їх реалізують, було апробовано при розв’язанні практичних задач моделювання. Зокрема, виконано прогнозне моделювання динамічного стану продуктивного пласта з газованою нафтою за результатами якого на рисунках 1 та 2 (як приклад) наведено поля пластового тиску $u = u(t, z)$ газонасиченості $S_2 = S_2(t, z)$.



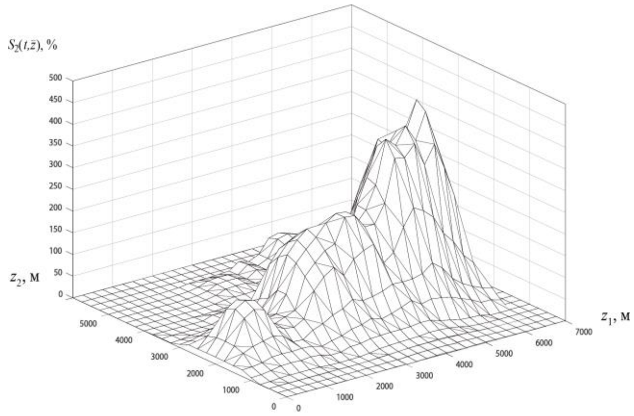


Рисунок 1. — Поле тиску $u = u(t, z)$ Рисунок 2. — Поле газонасиченості $S_2 = S_2(t, z)$

Дано оцінку якості моделювання з використанням запропонованої ММ процесу фільтрації, що являє собою варіаційну нерівність, та відомих моделей у вигляді ДРЧП. При цьому було досягнуто зменшення нормованої середньоквадратичної похибки на $(4...8)\%$ за рахунок можливості математичної формалізації особливостей якісного перебігу фізичного процесу (питомої ваги газової фази в газонафтовій суміші).

Також виконано розв’язування задачі моделювання процесу фільтрації у фрактально-гетерогенній системі, який спостерігається при водонапірному режимі розробки нафтового покладу. В результаті отримано фронт «заводнення» пласта навколо добувної свердловини. Також отримано фрактальну характеристику процесу фільтрації — фрактальну розмірність, враховуючи реальні геометричні параметри елементів реологічної структури. Аналіз фрактальної розмірності (ступеню самоподібності) дав змогу зробити висновок: чим більше обуреність фронту поділу фаз, тим більше значення фрактальної розмірності. Експерименти показали, що до збільшення фрактальної розмірності можуть призвести значні примусові сили (тобто дебіти продуктивних свердловин як джерела збурень), висока шпаруватість пористого простору, а також високі значення проникності фаз гетерогенної системи.

У висновках сформульовано основні наукові і практичні результати дисертаційної роботи.

У додатках містяться документи про впровадження результатів дисертаційної роботи, певні математичні викладки та доведення окремих теоретичних положень, а також вигляд діалогових вікон, які відповідають режимам роботи програмного комплексу.

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі розв’язано важливу наукову задачу, яка полягає у створенні моделей, методу чисельного моделювання процесів фільтрації у гетерогенних системах на основі застосування та розвитку апарату варіаційних нерівностей, а також у розробці комп’ютерно-орієнтованих інструментальних засобів моделювання, які забезпечують ефективне розв’язування прикладних задач при дослідженні і практичному використанні широкого класу природних та технологічних процесів і об’єктів.

В тому числі отримано наступні теоретичні та практичні результати:

1. Виконано аналіз основних обчислювальних процесів, які реалізуються в системах моделювання природних та технологічних об’єктів, що відрізняються явищами фільтрації (реології) гетерогенного характеру. Показано, що застосування існуючих систем моделювання процесів фільтрації з притаманною гетерогенною поведінкою, обмежено недостатньою ефективністю та універсальністю цих систем та зумовлено дією комплексу протиріч. Зокрема, при значному зростанні можливостей та зменшенням вартості інструментальних засобів має місце обмеженість методів побудови відповідних систем моделювання; при вираженому інформаційному характері обчислювальних процедур в системах моделювання недостатньо знаходять застосування адекватні ММ як первинне джерело даних для побудови систем моделювання; при схожості задач в системах моделювання, що розв’язуються (наприклад, реалізація виразів динаміки та побудова полів шуканих функцій), в них спостерігається обмеженість застосування уніфікованих методів та процедур відшукання відповідних розв’язків; при розширенні кола задач, що розв’язуються, мають місце обмежені можливості систем моделювання (наприклад, модельної підтримки, методологічного та алгоритмічного забезпечення).

2. Показано, що найбільш повно особливості фізики перебігу процесів фільтрації у гетерогенних системах (неоднорідність фізико-хімічного складу субстанції, що фільтрується, або середовища, в якому відбувається процес фільтрації; наявність або поява фазових переходів, спричинених зміною умов перебігу процесу фільтрації; різко виражена спрямованість розвитку; наявність граничних градієнтів функції стану; в’язкопластичність субстанції, яка фільтрується тощо) описуються в рамках апарату варіаційних нерівностей у частинних похідних. Це дозволило обґрунтувати вибір варіаційних нерівностей в якості адекватних ММ процесів фільтрації з притаманною гетерогенною поведінкою, а також напрямку досліджень щодо створення та практичного застосування систем моделювання зазначеними процесами.

3. Виконано систематизацію та класифікацію процесів фільтрації у гетерогенних системах в основу яких покладено особливості якісного перебігу фізичних явищ досліджуваних процесів. На підставі запропонованих систематизації та класифікації розроблено ММ процесів фільтрації з притаманною гетерогенною поведінкою у вигляді варіаційних нерівностей у частинних похідних (з відповідними початковими та граничними умовами) для яких сформульовано і строго доведено теореми існування та єдиності отримуваних розв’язків. Дані ММ являють собою модельну підтримку розробленої системи моделювання

досліджуваних процесів і дозволяють підвищити якість моделювання (зменшити нормовану середньоквадратичну похибку на $(4 \ldots 8)\%$) у порівнянні з моделями у вигляді диференційних рівнянь у частинних похідних за рахунок можливості математичної формалізації особливостей якісного перебігу фізичного процесу (зокрема, фільтрації газорідинних сумішей як типових випадків гетерогенних систем: питомої ваги газової фази у суміші, здатності розчинності газової фази у рідинній фазі суміші, умов утворення та розвитку газової фази в суміші, впливу граничного градієнта на реологію суміші).

4. Набув подальшого розвитку (для випадку процесів фільтрації у гетерогенних системах) метод обчислювальної реалізації ММ, які представлено у вигляді варіаційних нерівностей у частинних похідних. Метод являє собою модифікацію методу, в основу якого покладено оптимізаційну процедуру максимуму функції Гамільтона (метод МФГ).

Розроблено дискретні ММ процесів фільтрації у гетерогенних системах, а також алгоритмічні засоби реалізації цих моделей на підставі модифікованого методу МФГ.

5. Розроблено ММ процесів фільтрації гетерогенних систем в разі, якщо останні характеризуються властивостями фрактальності (самоподібності) структури, причому як самої субстанції, що здійснює фільтраційний рух (зокрема, наприклад: багатофазні рідини, що не змішуються; емульсії; суспензії тощо), так і просторової області, в якій відбувається процес фільтрації. Область теоретичного та практичного застосування розроблених ММ поширюється за умови врахування взаємодії часток дисперсної фази, причому з реологічними властивостями, які залежать від часових характеристик (наприклад, тиксотропних) або з нелінійними ефектами (зокрема, коливаннями реологічних характеристик, пов'язаних із взаємодією структурних елементів).

Моделі також представлено в класі варіаційних нерівностей у частинних похідних та реалізовано на основі модифікованого методу МФГ.

Показана можливість врахування розривності коефіцієнтів та неточності вхідних даних при моделюванні процесів фільтрації у фрактально-гетерогенних системах, що представлено та сформульовано як некоректно поставлена задача. Останню розв'язано на основі вейвлет підходу.

6. Розроблено та запропоновано автоматизований комплекс інструментальних програмних засобів (ІПЗ) розв'язування задач моделювання процесів фільтрації у гетерогенних системах. ІПЗ дозволяють виконати різнобічний цикл прикладних досліджень зазначених процесів в умовах обчислювального експерименту. Застосування комплексу ІПЗ дозволило скоротити час моделювання в $(1{,}2 \ldots 1{,}4)$ рази у порівнянні з базовим пакетом Matlab.

7. Розглянуто досвід застосування розроблених у дисертаційній роботі ММ, методу та засобів математичного моделювання в практиці дослідження процесів фільтрації у гетерогенних і фрактально-гетерогенних системах. Зокрема розв'язано наступні прикладні задачі:

— виконано прогнозне моделювання динамічного стану продуктивного пласта з газованою нафтою, ММ якого визначено на підставі запропонованих в дисертаційній роботі класифікаційних ознак процесів фільтрації у гетерогенних системах, причому достовірність правильної класифікації підвищено за рахунок зменшення сумарної похибки 1 та 2 роду на $(3\ldots 5)\%$;

— виконано моделювання процесу фільтрації у двофазній фрактально-гетерогенній системі та визначено фрактальну характеристику процесу — фрактальну розмірність. Аналіз останньої дозволив якісно оцінити ступінь «гладкості» фронту поділу фаз гетерогенної системи. Моделюванням показано, що при значеннях фрактальної розмірності $D \to 1{,}0$ фрактальна структура процесу фільтрації у гетерогенній системі зникає, а фронт поділу фаз набуває властивості «гладкості».

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ПО ТЕМІ ДИСЕРТАЦІЇ З ОСОБИСТИМ ВКЛАДОМ

Основні результати дисертації викладено у 11 наукових працях, в тому числі: 6 статтях, з яких 5 опубліковано в журналах, що включено до Переліку фахових видань України та 1 — у зарубіжному журналі; 5 тезах наукових конференцій.

Статті, які опубліковано у фахових виданнях України:

1. *Савич, В. С.* Математичне моделювання фільтраційних процесів газонасичених ньютонівської та не ньютонівської рідин в зоні тиску насичення [Текст] / *В. С. Савич*, О. О. Ошовська // Інформатика та математичні методи в моделюванні. — 2014. — Т. 4, № 4. — С. 375 — 380.

(видання включено до наукометричних баз: Index Copernicus International, Ulrich's Periodicals Directory)

2. *Савич, В. С.* Моделювання стаціонарної фільтрації неньютонівських рідин у неоднорідному середовищі [Текст] / *В. С. Савич*, О. О. Ошовська // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць /Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАНУ, Кам'янець-Подільський націон. ун-т ім. Івана Огієнка. — Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський націон. ун-т ім. Івана Огієнка, 2014. — Вип. 11. — С. 147 — 155.

3. *Савич, В. С.* Автоматизированный вычислительный комплекс для реализации имитационного моделирования гетерогенных систем [Текст] / *В. С. Савич* // Електротехнічні та комп'ютерні системи. К.: Техніка, 2015. — № 17 (93). — С. 87 — 93.

(видання включено до наукометричних баз: Index Copernicus International, Ulrich's Periodicals Directory, Electronic Journals Library, Google Scholar)

4. *Савич, В. С.* Математическое моделирование течения газированной жидкости в докритической области гетерогенных систем [Текст] / *В. С. Савич* // Інформатика та математичні методи в моделюванні. — 2015. — Т. 5, № 2. — С. 160 — 166.

(видання включено до наукометричних баз: Index Copernicus International, Ulrich's Periodicals Directory)

5. Положаєнко, С. А. Математичне моделювання процесу фільтрації з розривними коефіцієнтами у гетерогенних системах за умови неточних вхідних

даних / С. А. Положаєнко, *В. С. Савич* // Інформатика та математичні методи в моделюванні. — 2016. — Т. 6, № 4. — С. 372 — 379.

(видання включено до наукометричних баз: Index Copernicus International, Ulrich's Periodicals Directory)

Статті, які опубліковано у зарубіжних виданнях:

6. Polozhaenko, S. A. Mathematical modeling and identification of filtration processes in heterogeneous stratal systems [Текст] / S. A. Polozhaenko, *V. S. Savich* // Colloquium-journal. — 2017. — № 2. — P. 47 — 54.

(іноземне видання: Польща, Варшава)

Опубліковані праці апробаційного характеру:

7. Лысенко, Н. А. Математическая модель процесса фильтрации в многокомпонентной системе с «промежуточным» агентом [Текст] / Н. А. Лысенко, *В. С. Савич* // Сучасні інформаційні технології 2015 (МІТ-2015): Матеріали п'ятої Міжнародної науково-практичної конференції студентів і молодих науковців, 21 — 22 квітня 2015 р. — Одеса, ВМВ, 2015. — С. 78 — 79.

8. *Савич, В. С.* Моделювання стаціонарної фільтрації аномальних рідин у неоднорідному середовищі [Текст] / *В. С. Савич* // Праці V Міжнародної науково-практичної конференції «Обробка сигналів і негаусівських процесів»: Тези доповідей. — Черкаси: ЧДТУ, 2015. — С. 201 — 203.

9. *Савич, В. С.* Математична модель процесу фільтрації у гетерогенній системі з «проміжним агентом» Текст] / *В. С. Савич* // Сучасні інформаційні технології 2016 (МІТ-2016): Матеріали шостої Міжнародної науково-практичної конференції студентів і молодих науковців, 25 — 27 квітня 2016 р. — Одеса, ВМВ, 2015. — С. 69 — 71.

10. Положаєнко, С. А. Інформаційна технологія реалізації засобів моделювання фрактально-неоднорідних гетерогенних пластових систем [Текст] / С. А. Положаєнко, *В. С. Савич* // Winter InfoCom 2016: Матеріали III Міжнародної науково-практичної конференції, м. Київ, 1 — 2 грудня 2016 р. — К.: Вид-во ТОВ «Інженіринг», 2016. — С. 30 — 33.

11. *Савич, В. С.* Математическая формализация процесса образования фрактальных структур при водонапорном режиме нефтедобычи [Текст] / *В. С. Савич* // Сборник публикаций мультидисциплинарного научного журнала «Архивариус» по материалам XVI международной научно-практической конференции: «Наука в современном мире». — Киев: мультидисциплинарный научный журнал «Архивариус», 2017. — С. 87 — 92.

АНОТАЦІЯ

Савич В. С. Моделі, метод і засоби математичного моделювання процесів фільтрації у гетерогенних системах. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 — Математичне моделювання та обчислювальні методи. — Одеський національний політехнічний університет, Одеса, 2017.

Дисертаційну роботу присвячено створенню моделей, методу чисельного моделювання процесів фільтрації у гетерогенних системах на основі застосування та розвитку апарату варіаційних нерівностей, а також розробці комп’ютерно-орієнтованих інструментальних засобів моделювання, які забезпечують ефективне розв’язування прикладних задач при дослідженні і практичному використанні широкого класу природних та технологічних процесів і об’єктів.

В роботі виконано систематизацію сукупності процесів фільтрації у гетерогенних системах, на підставі чого виконано їх класифікацію, з обранням за класифікаційні ознаки — особливості якісного перебігу фізичних явищ досліджуваних процесів.

Запропоновано ММ процесів фільтрації у гетерогенних та фрактально-гетерогенних системах з представленням цих моделей як варіаційних нерівностей у частинних похідних. Доведено теореми існування та єдності розв’язку відповідних варіаційних нерівностей. Виконано узагальнення запропонованих ММ, на підставі якого запропоновано метод чисельної реалізації моделей процесів фільтрації у гетерогенних системах.

Результати теоретичних досліджень, зокрема, розроблені ММ, метод та алгоритми їх обчислювальної реалізації, покладено в основу побудови програмного комплексу, орієнтованого на розв’язання прикладних задач математичного моделювання процесів фільтрації у гетерогенних системах.

Ключові слова: гетерогенні системи, процеси фільтрації, моделювання, математична модель, варіаційні нерівності у частинних похідних, чисельний метод (алгоритм), фрактальная размерность.

АННОТАЦИЯ

Савич В. С Модели, метод и средства математического моделирования процессов фильтрации в гетерогенных системах. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 01.05.02 — Математическое моделирование и вычислительные методы. — Одесский национальный политехнический университет, Одесса, 2017.

Диссертационная работа посвящена созданию моделей, метода численного моделирования процессов фильтрации в гетерогенных системах на основе применения аппарата вариационных неравенств, а также разработке компьютерно-ориентированных средств моделирования, обеспечивающих эффективное решение прикладных задач при исследовании и практическом применении широкого класса природных и технологических процессов и объектов.

В результате анализа основных вычислительных процессов, реализуемых в системах моделирования природных и технологических объектов, которые отличаются явлениями фильтрации (реологии) гетерогенного характера, показано, что применение существующих систем моделирования ограничено их недостаточной эффективностью и универсальностью. Также, в результате анализа сделан вывод о том, что наиболее полно особенности физики протекания процессов фильтрации в гетерогенных системах (в частности: неоднородность физико-химического состава фильтрующихся субстанций или среды; наличие фазовых переходов; резко выраженной направленности развития и т.д.) описывается в рамках вариационных неравенств в частных производных. Последнее позволило обосновать выбор вариационных неравенств в качестве адекватных ММ процессов фильтрации с присущим гетерогенным поведением.

Выполнены систематизация и классификация процессов фильтрации в гетерогенных системах, в основу которых положены особенности качественного протекания исследуемых процессов. Базируясь на выполненных систематизации и классификации, разработаны ММ процессов фильтрации в гетерогенных и фрактально-гетерогенных системах в виде вариационных неравенств в частных производных, для которых сформулированы и доказаны теоремы существования и единственности решения. С целью унификации подхода к численной реализации полученных моделей было выполнено их обобщение и предложен соответствующий метод, основанный на оптимизационной процедуре принципа максимума функции Гамильтона. Разработаны дискретные аналоги ММ процессов фильтрации в гетерогенных системах, а также алгоритмические средства реализации полученных дискретных моделей.

Разработаны ММ процессов фильтрации в гетерогенных системах для случая, когда последние характеризуются свойствами фрактальности (самоподобия) структуры, причем как самой субстанции, совершающей фильтрационное движение, так пространственной области, в которой это движение осуществляется. Развитием ММ данного класса являются модели, учитывающие взаимодействие частичек дисперсной фазы, что позволяет выполнить моделирование фрактально-гетерогенных систем, реологические свойства которых зависят от временных характеристик или обусловлены нелинейными эффектами. Также показана возможность учета разрывности коэффициентов и неточности входных данных при математической формализации исследуемых процессов. Выполнена дискретизация непрерывных ММ процессов фильтрации во фрактально-гетерогенных системах, представленных в виде вариационных неравенств, и разработаны алгоритмические средства их вычислительной реализации.

Результаты теоретических исследований, предложенные ММ, метод и алгоритмы вычислительной реализации этих ММ, положены в основу построения проблемно-ориентированного программного комплекса для решения прикладных задач математического моделирования процессов фильтрации в гетерогенных и фрактально-гетерогенных системах. Опыт практического применения данного комплекса позволил, на примере продуктивных пластов с газированной нефтью, решить ряд задач прогнозного моделирования динамического состояния реальных гетерогенных систем, а также оценить степень «гладкости» фронта раздела фаз гетерогенной системы.

Ключевые слова: гетерогенные системы, процессы фильтрации, моделирование, математическая модель, вариационные неравенства в частных производных, численный метод (алгоритм), фрактальная размерность.

ABSTRACT

Savich V. S. Models, methods and tools for mathematical modeling of filtration processes in heterogeneous systems. — Manuscript.

Dissertation for the degree of candidate of technical sciences, specialty 01.05.02 — Mathematical modeling and computational methods. — Odessa National Polytechnic University, Odessa, 2017.

The thesis is devoted to the creation of models, the method of numerical simulation of filtration processes in heterogeneous systems based on application of the variational inequalities apparatus, and the development of computer-oriented modeling tools that provide effective solution of applied problems in the study and practical application of a wide class of natural and technological processes and objects.

The set of filtration processes in heterogeneous systems was systematized in the work, whereby their classification has been fulfilled, with choice of the classification features –high-quality flow features of physical phenomena of studied processes.

Mathematical models of filtration processes in heterogeneous and fractal-heterogeneous systems of these models representation used as varitional inequalities of partial. The theorems of existence and cohesion of solution corresponding varitional inequalities were proven. The generalization of the proposed MM was performed. Under this, the method of numerical models of filtration processes implementation in heterogeneous systems were developed.

The results of theoretical research, particularly developed MM, method and computer algorithms to implement were the basis for building a software system focused on solving of applied problems of mathematical modeling filtration processes in heterogeneous systems.

Keywords: heterogeneous systems, filtration processes, modeling, mathematical model, varitional inequalities in partial derivatives, numerical method (algorithm), fractal dimension.