К. ф.-м.н. Ситник В.А., Драчинский Б. Л.,
Одесский национальный политехнический университет, Украина.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ АДАПТИВНОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

Аннотация.

Рассмотрена актуальная задача адаптивного прогнозирования временного ряда. В качестве модели выбрана $ARIMA(p,d,q)$. Выбор параметров осуществляется на основании анализа выборочной автокорреляционной функции и скользящего среднего. Оценка и оптимизация параметров модели проведена методом Мелларда. Полученные результаты могут применяться для решения широкого спектра задач анализа финансовых показателей.

I. Введение.

Важность методов адаптивного прогнозирования не вызывает сомнения благодаря широте применения, – от показателей фондового рынка, денежных потоков, изменений ежедневных остатков ([1]), до эволюции технико-экономических характеристик изделий и переменных параметров химических процессов и показателей частоты отказов оборудования ([2]).

II. Постановка задачи.

Цель данной работы состоит в построении эффективной методики прогноза значений ряда реализации продукции на основе наблюдаемых значений.

III. Результаты.

Обычной мерой надежности модели является сравнение прогноза построенного по урезанному ряду с известными исходными данными. На основании 504 наблюдений строится прогноз на 3 шага вперед. Для достижения поставленной цели пройдены последовательно следующие этапы:

1) идентифицирована модель, т.е. определено количество параметров, характеризующих модель;
2) проведена оценка параметров модели;
3) исследована адекватность построенной модели;

4) на основе адекватной модели построен прогноз;
5) проведен анализ полученных результатов.

Модель $ARIMA(p,d,q)$ имеет вид:

$$\Delta^d X_t = c + \sum_{i=1}^{p} a_i \Delta^d X_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} b_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t .$$

ARIMA-модели позволяют моделировать интегрированные или разностно-стационарные временные ряды (DS-ряды, diferencestationary) ([3]).

В модели ARIMA параметры d – порядок разности, p – порядок авторегрессии, q - порядок скользящего среднего.

Для определения d – неизвестного порядка модели, визуализируем ряд и определим, является ряд стационарным или нет (рис. 1).

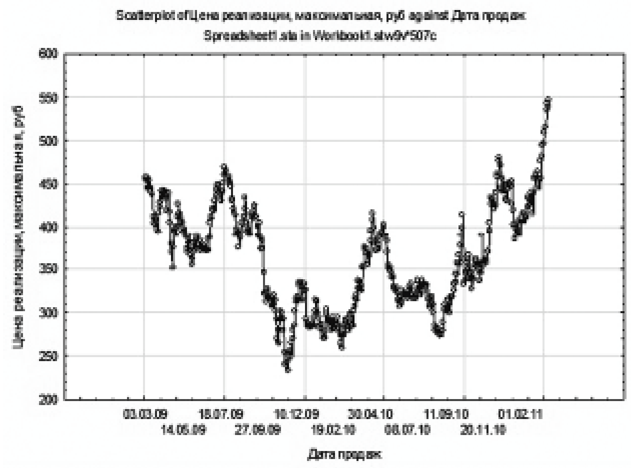

Рис. 1 – График временного ряда

Наличие тренда, который хорошо виден – первое свидетельство о нестационарности ряда.

Уточнить наличие, или отсутствие, нестационарности можно по выборочной автокорреляционной функции (АКФ) ([3])

$$f(\tau) = cor(y_t, y_{t-\tau}),$$

$$cor(x,y) = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}},$$

где

n – количество наблюдений,

x_i – значение i -го признака одного события,

y_i – значение i -го признака другого события,

$\bar{x}, \bar{y}$ – средние значения x и y соответственно.

Выборочная АКФ имеет тенденцию к затуханию (рис. 2).

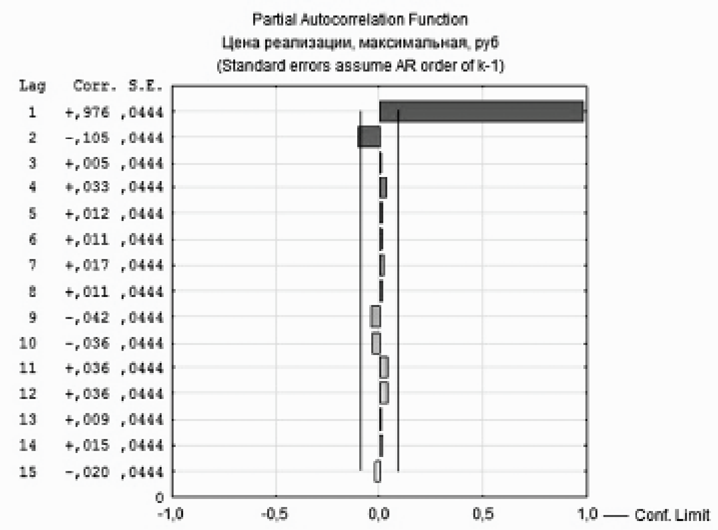

Рис. 2 – График выборочной автокорреляционной функции ряда

Так как АКФ экспоненциально убывает с лага 1, а частная автокорреляционная функция (ЧАКФ) имеет синусоидальную форму, то зададим параметры: $p = 1$, $d = 1$.

Проведя оценку параметров модели $ARIMA(1,1,0)$ методом Меларда ([4]), получаем результаты, представленные на рис. 3. В первом столбце приведены точечные оценки параметров, во втором – асимптотическая стандартная ошибка оценок, в третьем – значения t -критерия, в четвертом – уровни надежности, в пятом и шестом – соответственно нижние и верхние границы 95%-ных доверительных интервалов для соответствующего неизвестного параметра модели.

Input: Цена реализации, максимальная, руб (Spreadsheet1.sta in Wc
Transformations: D(1)
Model:(1,1,0) MS Residual= 101,27

Paramet.	Param.	Asympt. Std.Err.	Asympt. t(505)	p	Lower 95% Conf	Upper 95% Conf
p(1)	0,142505	0,044113	3,230446	0,001317	0,055837	0,229173

Рис. 3 Оценка параметров методом Мелларда

Построив прогноз на три шага вперед, мы получаем результаты, отраженные на рис 4.

Forecasts; Model:(1,1,0) Seasonal lag: 12 (Spreadsheet1.sta in Workbook1.stw)
Input: Цена реализации, максимальная, руб
Start of origin: 1 End of origin: 507

CaseNo.	Forecast	Lower 90,0000%	Upper 90,0000%	Std.Err.
508	538,4341	521,8507	555,0174	10,06348
509	538,2822	513,1032	563,4611	15,27965
510	538,2605	506,5457	569,9753	19,24586
511	538,2574	501,1154	575,3994	22,53931
512	538,2570	496,3823	580,1317	25,41133
513	538,2569	492,1321	584,3817	27,99044
514	538,2569	488,2419	588,2720	30,35121

Рис. 4 Прогноз на три шага вперед по модели ARIMA(1,1,0)

Рассмотрим остатки временного ряда. График остатков соответствует траектории белого шума (рис. 5).

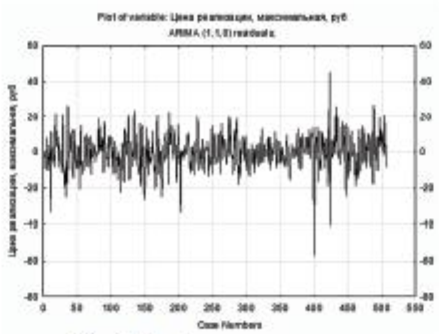

Рис. 5 График остатков ряда

Предположение о нормальности остатков может быть проверено с помощью гистограммы остатков с наложенной нормальной плотностью ([1]) (рис. 6).

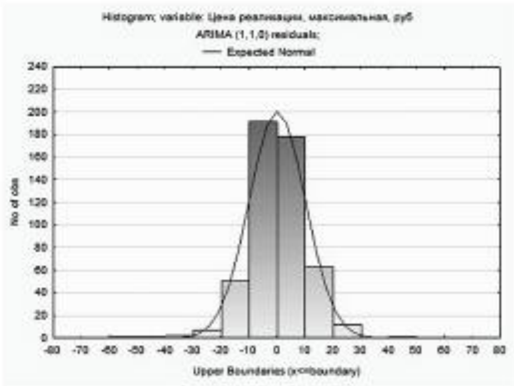

Рис 6. Гистограмма остатков ряда

При рассмотрении автокорреляций и частных автокорреляций ([2])

$$pacf(k)=\begin{cases} corr\left(y_{t+k},y_t\right),\ k=1,\\ corr\left(y_{t+k}-y_{t+k}^{k-1},y_t-y_t^{k-1}\right),\ k>1, \end{cases}$$

где y_t^{k-1} - линейная регрессия на $y_{t+1},y_{t+2},...,y_{t+k-1}$, видно, что остатки ряда (рис. 7) достаточно слабо коррелированны, не выходят за пределы диапазона двух стандартных ошибок.

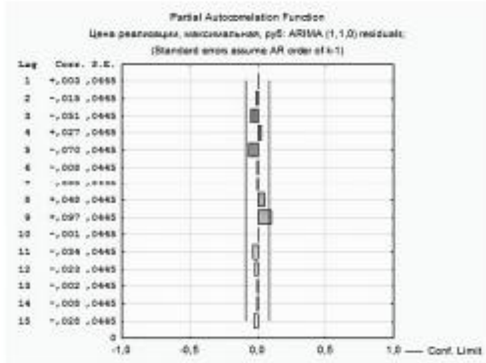

Рис. 7 Частная автокорреляция остатков

Осталось оптимизировать порядок скользящего среднего, что делает модель более совершенной, хотя и более сложной. Иccледования целого ряда показателей финансовой эффективности привели авторов к выводу, что изменение направления тренда хорошо фиксируется посредством сечения скользящих средних математическим ожиданием при $q = 9$ (рис. 8).

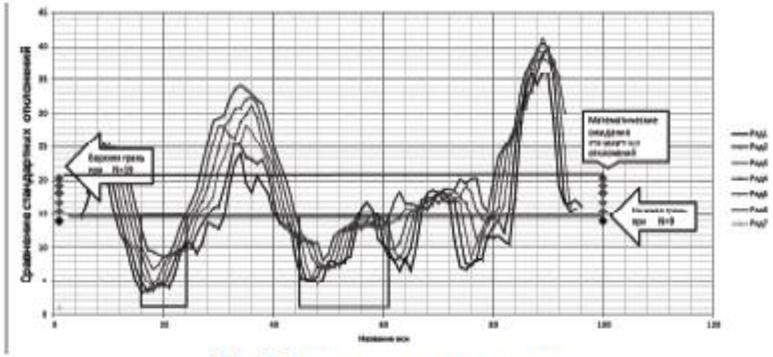

Рис. 8 Анализ скользящих средних

В дальнейшем это утверждение потребует дополнительного анализа и точного обоснования, но его эффетивность проверена на практике и показывает широкую применимость для практических исследований.

IV. Выводы.

Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод об адекватности построенной модели, а предложенный подход к определению параметров позволяет эффективно решать широкий спектр задач. Полученные новые результаты по практике применения скользящих средних позволяют проводить дальнейшие исследования и оптимизацию параметров модели адаптивного прогнозирования.

Литература

1. Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов: учеб. пособие / Ю.П. Лукашин. – М. : Финансы и статистика, 2003. – 416 с.
2. Лоскутов А.Ю. Применения метода локальной аппроксимации для прогноза экономических показателей / А.Ю. Лоскутов, Д.И. Журавлёв, О.Л. Котляров // Вопросы анализа и управления риском. – 2003. – Т. 1, №1. – С. 21-31.
3. Орлов Ю.П. Построение выборочной функции распределения для прогнозирования нестационарного временного ряда / Ю.Н. Орлов, К.П. Осминин // Математическое моделирование. – 2008. – Т. 20, №9. – С. 23-33.
4. Mellard G.A. A fast algorithm for the likelihood of autoregressive – moving average models. // Applied statistics. 1984. Vol. 33. P. 104-119.